Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

М. И. Белишев, С. А. Иванов

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУСКОРОСТНОЙ СИСТЕМЫ

0. Введение

0.1. Двускоростная система.

В работе изучается обратная задача для двускоростной динамической системы и дается характеристическое описание данных обратной задачи. Особенность таких систем состоит в том, что в них имеются волны двух типов, распространяющиеся с различными скоростями и взаимодействующие друг с другом. В качестве примера упомянем систему взаимодействующих кабельных линий в электротехнике и некоторые модели теории упругости (балка Тимошенко).

Двухскоростная динамическая система (2-ДС) это система вида

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0,\ t > 0; \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{3}$$

в которой $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$ есть постоянная 2×2-диагональная матрица: $\rho_{1,2} = \mathrm{const}$, $0 < \rho_1 < \rho_2$; $A = A(x)$, $B = B(x)$ суть гладкие 2×2 матрицы-функции (*коэффициенты системы*). Всюду в работе "гладкий" означает C^∞-гладкий; все функции, матричные элементы и пространства вещественны.

На матричные коэффициенты налагаются условия самосопряженности

$$A^{\#}(x) = -A(x); \quad \frac{dA}{dx}(x) = B(x) - B^{\#}(x),\ x > 0; \tag{4}$$

(знак # означает транспонирование).

Работа поддержана РФФИ, грант No. 98–01–00314, 96–15–96121.

Двукомпонентную вектор-функцию $f = f(t) = \binom{f_1(t)}{f_2(t)}$, входящую в неоднородное граничное условие (3), будем называть *граничным управлением*. Через $u = u^f(x,t) = \left(u_1^f(x,t), u_2^f(x,t)\right)^{\#}$ обозначим решение задачи (*волну*).

В динамической обратной задаче роль данных играет функция отклика системы (ф.о.). Пусть $U(x,t)$ есть фундаментальное решение задачи (1)–(3), т.е. матрица-функция столбцы которой суть обобщенные решения, отвечающие управлениям $\binom{\delta(t)}{0}$ и $\binom{0}{\delta(t)}$ (δ – дельта-функция). Справедливо представление

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} \delta(t - x/c_1) & 0 \\ 0 & \delta(t - x/c_2) \end{pmatrix} + \tilde{U}(x,t), \;\; x, t > 0, \qquad (5)$$

в котором $c_1 = \rho_1^{-1/2}$ и $c_2 = \rho_2^{-1/2}$ суть *скорости* волн; $\tilde{U}(x,t)$ есть матрица-функция, гладкая вне характеристик $t = x/c_i$ уравнения (1) и аннулирующаяся при $t > x/c_1$. Матрица-функция $r(t) := \tilde{U}_x(+0,t)$ называется *функцией отклика* системы (1)–(3); из (4) выводится свойство симметричности r: $r(t) = r^{\#}(t)$, $t > 0$.

Система (1)–(3) – гиперболическая; волны в ней распространяются с конечными скоростями. Как следствие, ф.о. зависит от коэффициентов локально: значения $r(t)$ для $t < 2T$ определяются значениями $A(x)$, $B(x)$ при $x < c_1T$. Это свойство мотивирует следующую постановку обратной задачи: по заданной при $t < 2T$ ф.о. $r(t)$ требуется восстановить коэффициенты системы $A(x)$, $B(x)$ при $x < c_1T$. Такая постановка восходит к [4].

0.2. Основной результат и примечания.

Цель работы состоит в решении обратной задачи и нахождении необходимых и достаточных условий, при которых заданная матрица-функиця является функцией отклика системы вида (1)–(3). Приведем наш главный результат.

Теорема 1. *Гладкая симметричная функция $r(t)$, $t \in [0, 2T]$, является функцией отклика 2-ДС (1)–(3) тогда и только тогда, когда оператор*

$$(C^T f)(t) := \sqrt{\rho} f(t) + \int_0^T C^T(t,s) ds, \quad 0 < t < T, \qquad (6)$$

с ядром

$$C^T(t,s) := \frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta$$

положительно определен в $L^2\left((0,T);\mathbb{R}^2\right)$.

Условия, подобные приведенному в теореме 1 известны давно (см. [4, 7]). В работах Л. П. Нижника и его учеников [9] получена характеризация операторов рассеяния многоскоростных систем. Отметим однако, что постановка и данные обратной задачи, изучаемой в настоящей работе, существенно отличаются от использованных в [9]. В случае односкоростной системы ($\rho_1 = \rho_2$) положительная определенность C^T извлекается из [1, 5]. Необходимость этого условия для 2-ДС доказана, по-существу, в [6]; достаточность – новый результат, который устанавливается на следующем пути. Вначале решается обратная задача: разрабатывается процедура, восстанавливающая коэффициенты по заданной ф.о.. Далее, для функции r, удовлетворяющей условиям теоремы 1, повторяя шаги процедуры, мы конструируем динамическую систему вида (1)–(3). Затем устанавливаем, что функция отклика построенной системы совпадает с r.

Отметим, что решение обратной задачи неединственно: пар $\{A, B\}$, которым отвечает одна и та же функция отклика, бесконечно много. Этого следовало ожидать: симметричная матрица-функция r определяется тремя независимыми скалярными функциями r_{11}, r_{12}, r_{22}, а восстанавливаемая пара (с учетом (4)) – четырьмя: a_{12}, b_{11}, b_{12}, b_{22}. Мы показываем, как восстановить все такие пары.

Работа развивает подход к обратным задачам, основанный на их связях с теорией граничного управления, так называемый BC–метод[2] (см. [2]). Она является продолжением работы [6], в которой рассматривался случай $A = 0$, $B^{\#} = B$, и содержит много ссылок на последнюю. Если такая ссылка не сопровождается пояснениями, то подразумевается, что результат, о котором идет речь, является простым обобщением результата из [6]. В ряде мест, ввиду громоздкости выкладок, мы вынуждены ограничиться набросками доказательств. Ту же цель – разгрузить работу

[2]от “Boundary Control”

– преследуют завышенные требования на гладкость. По наблюдению авторов, техническая сложность – специфическая черта двухскоростной системы.

С глубоким уважением авторы посвящают эту работу Нине Николаевне Уральцевой.

1. Прямая и обратная задачи

1.1. Начально–краевая задача.

Стандартным приемом [6] задача (1)–(3) сводится к интегральному уравнению; при управлении из $L^2_{\rm loc}\left((0,\infty);\mathbb{R}^2\right)$ ее обобщенное решение определяется как решение этого интегрального уравнения в классе $L^2_{\rm loc}\left(\mathbb{R}_+\times(0,\infty);\mathbb{R}^2\right)$ (мы различаем полуоси $t>0$ и $x>0$, обозначая их через $(0,\infty)$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно). На этом пути устанавливается корректность задачи в указанных классах и устанавливается существование фундаментального решения (5), на свойствах которого мы остановимся подробнее.

Фундаментальное решение (5), рассматриваемое как распределение, сингулярно на характеристиках и локализовано в переднем конусе, отвечающем быстрым волнам: $U(x,t)=0$ при $x>c_1t$; его регулярная часть $\tilde U$ является матрицей-функцией, гладкой вне характеристик $\{(x,t)|\,c_it=x\}$; $i=1,2$. Уточним последнее: квадрант $\{(x,t)|\,x>0,\ t>0\}$ разбивается характеристиками на три связные компоненты (сектора) и "гладкость вне характеристик" означает, что в каждой из компонент $\tilde U$ есть сужение гладкой функции, определенной в окрестности замыкания этой компоненты. Такого понимания мы придерживаемся всюду в аналогичных случаях.

В силу гиперболичности задача

$$\rho u_{tt}-u_{xx}+Au_x+Bu=0,\quad (x,t)\in\Delta^T; \tag{7}$$

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0; \tag{8}$$

$$u|_{x=0}=f, \tag{9}$$

рассматриваемая в области Δ^T

$$\Delta^T:=\{(x,t)|\ 0<x<c_1T,\ 0<t<2T-\frac{x}{c_1}\}$$

оказывается корректной, причем, если управление (9) совпадает при $t\leqslant T$ с управлением (3), то решение задачи (7)–(9) совпадет с решением (1)–(3) при временах $t \leqslant T$. При этом зависимость фундаментального решения от коэффициентов системы носит локальный характер: для каждого $T > 0$ сужение $\tilde{U}$ на область Δ^T определяется значениями $A(x)$, $B(x)$ при $0 < x < c_1 T$ (не зависит от поведения $A(x)$, $B(x)$ при $x > c_1 T$). В частности, ф.о. $r(t)$ при временах $0 < t < 2T$ определяется значениями $A(x)$, $B(x)$ при $0 < x < c_1 T$.

Вернемся к задаче (1)–(3). По независимости коэффициентов от времени справедливо представление Дюамеля:

$$u^f(x,t) = U(x,t) * f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t - x/c_1) \\ f_2(t - x/c_2) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{t-x/c_1} \tilde{U}(x, t-s) f(s) ds \quad (10)$$

для $f \in L^2_{\mathrm{loc}}\left((0,\infty); \mathbb{R}^2\right)$; в этой записи учтено расположение носителя $\tilde{U}$ и использовано соглашение: *все зависящие от времени функции доопределяются нулем при* $t < 0$. Из представления (10) вытекает, что

$$\operatorname{supp} u^f(\cdot,t) \subset [0, c_1 t]; \quad u^f(\cdot,t) \in L^2\left((0,\infty); \mathbb{R}^2\right), \; 0 < t < T; \quad (11)$$

из того же представления имеем:

$$u^f_x(0,t) = -\sqrt{\rho}\frac{df}{dt}(t) + (r * f)(t), \; 0 < t < T. \quad (12)$$

1.2. Медленные волны.

Если в уравнении (1) матрица A равна нулю, а B диагональна, то 2-ДС распадается на две невзаимодействующие подсистемы (два канала – быстрый и медленный), волны в которых распространяются со скоростями c_1 и c_2. Если же каналы взаимодействуют, возникают интересные эффекты. Во-первых, в медленном канале появляются появляются возмущения, распространяющиеся с быстрой скоростью c_1 (эффект предвестника). Во-вторых, несмотря на взаимодействие, в системе существуют волны, передний фронт которых движется с медленной скоростью c_2, то есть

$$u^f(x,t) \equiv 0 \text{ при } c_2 t < x. \quad (13)$$

Приведем описание управлений, инициирующих такие волны (см. [6]).

Лемма 1. *Существует единственная функция $l = l(t) \in C^\infty_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$, такая что соотношение* (13) *выполнено тогда и только тогда, когда компоненты управления $f = \binom{f_1}{f_2}$ связаны соотношением*

$$f_1(t) = (l * f_2)(t) = \int\limits_0^t l(t-s) f_2(s)\, ds, \quad t > 0. \tag{14}$$

Отметим, что функция l зависит от коэффициентов локально: для каждого $T > 0$ значения $l(t)$ при $0 < t < (1 - \frac{c_2}{c_1})T$ определяются значениями $A(x)$, $B(x)$ при $0 < x < c_2 T$.

1.3. Пространства и подпространства 2-ДС.

Рассмотрим двухскоростную динамическую систему (1)–(3) на конечном интервале времени:

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + A u_x + B u = 0, \quad x > 0,\ 0 < t < T; \tag{15}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \tag{16}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{17}$$

и введем пространства управлений и волн, связанные с этой системой.

Пространство управлений

$$\mathcal{F}^T := L^2\left((0,T); \mathbb{R}^2\right)$$

называется внешним пространством 2-ДС (15)–(17). В нем выделяется расширяющаяся цепочка подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}^T \,|\, \operatorname{supp} f \subset [T-\xi, T]\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T,$$

образованных запаздывающими управлениями. Запаздывание управления приводит к запаздыванию волны: из (10) легко следует, что

$$u^f(x,t) = 0, \text{ при } x > c_1\xi,\ f \in \mathcal{F}^{T,\xi}. \tag{18}$$

В системе (15)–(17) (с конечным финальным моментом T) медленными волнами мы называем решения задачи, локализованные в переднем конусе, отвечающем медленной скорости c_2:

$$u^f(x,t) = 0, \text{ при } x > c_2 t,\ t < T;$$

в частности, $u^f(x,T) = 0$, $x > c_2 T$. Описание таких волн можно получить из леммы 1: волна $u^f(x,t)$, порожденная управлением

f является медленной тогда и только тогда, когда связь (14) на компоненты управления накладывается при $t < T - \frac{c_2}{c_1}T$.

В каждом из подпространств $\mathcal{F}^{T,\xi}$ введем подпространство

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_l^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}^{T,\xi} | \, f_1(t) = \int\limits_{T-\xi}^{T} l(t-s) f_2(s) ds \\ \text{при} \quad T - \xi < t < T - \frac{c_2}{c_1}\xi\},\end{gathered} \tag{19}$$

состоящее из управлений, инициирующих медленные волны, лежащие в медленном конусе с вершиной в точке $x = 0$, $t = T - \xi$: при $f \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$ имеем:

$$u^f(x,t) = 0, \quad x > c_2[t - (T - \xi)]. \tag{20}$$

На полуоси $x > 0$ введем пространства

$$\mathcal{H}^\mu := L^2_\rho\left((0,\mu);\mathbb{R}^2\right), \; (a,b)_{\mathcal{H}^\mu} := \int\limits_0^\mu < \rho a(x), b(x) > dx,$$

где $< \cdot, \cdot >$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Пространство $\mathcal{H}^{c_1 T}$ назовем внутренним пространством 2-ДС (15)–(17); как видно из (11), волны $u^f(\cdot, t)$ суть его элементы. В $\mathcal{H}^{c_1 T}$ выделим две цепочки подпространств $\mathcal{H}^{c_1 \xi}$ и $\mathcal{H}^{c_2 \xi}$, отвечающие запаздывающим управлениям из $\mathcal{F}^{T,\xi}$ и $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$. В силу (18), при $f \in \mathcal{F}^{T,\xi}$ имеем $u^f(\cdot, T) \in \mathcal{H}^{c_1\xi}$; если же $f \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$, то из (20), имеем $u^f(\cdot, T) \in \mathcal{H}^{c_2\xi}$.

1.4. Операторы 2-ДС.

а) Оператор $W^T: \; \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^{c_1 T}$,

$$W^T f := u^f(\cdot, T),$$

назовем *волновым*. Из (10) для решения задачи имеем представление

$$(W^T f)(x) = \begin{pmatrix} f_1(T - x/c_1) \\ f_2(T - x/c_2) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{T - x/c_1} w(x,s) f(s)\, ds, \quad 0 < x < c_1 T \tag{21}$$

с матричным ядром $w(x,s) = \tilde{U}(x, T - s)$, гладким вне характеристики $s = T - x/c_2$.

Лемма 2. *При любом $T>0$ оператор W^T действует изоморфно из $\mathcal{F}^T$ на свой образ $\operatorname{Ran} W^T \subset \mathcal{H}^{c_1 T}$, причем справедливо соотношение*

$$W^T \mathcal{F}_l^{T,\xi} = \mathcal{H}^{c_2\xi},\ 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{22}$$

Доказательство см. в [6]. Отметим, что множество волн $\{u^f(\cdot,T) |\, f\in\mathcal{F}^T\} = \operatorname{Ran} W^T$ не совпадает со всем пространством $\mathcal{H}^{c_1 T}$ (см. [6]).

Можно показать [6], что волновой оператор сохраняет гладкость в следующем смысле. Введем гладкие линеалы

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{T,\xi} &:= \mathcal{F}_l^{T,\xi} \cap C^\infty\left([0,T];\mathbb{R}^2\right),\ \mathcal{M}^T := \bigcup_{0<\xi<T} \mathcal{M}^{T,\xi};\\ \mathcal{N}^{c_2\xi} &:= \mathcal{H}^{c_2\xi} \cap C^\infty\left([0,c_1T];\mathbb{R}^2\right),\ \mathcal{N}^T := \bigcup_{0<\xi<T} \mathcal{N}^{c_2\xi}; \end{aligned} \tag{23}$$

(линеал $\mathcal{M}^T$ состоит из гладких управлений, аннулирующихся в некоторой окрестности $t=0$ и генерирующих медленные волны). Справедливы соотношения

$$W^T\mathcal{M}^{T,\xi} = \mathcal{N}^{c_2\xi},\ W^T\mathcal{M}^T = \mathcal{N}^T,$$

легко следующие из (21), (22).

б) Введем оператор

$$L := \rho^{-1}[\frac{d^2}{dx^2} - A\frac{d}{dx} - B], \tag{24}$$

связанный с уравнением (1); в силу (4) этот оператор самосопряжен по Лагранжу (симметричен на $C_0^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^2)$). Независимость коэффициентов системы от времени приводит к соотношению

$$W^T\frac{d^2}{dt^2}f = LW^Tf, \tag{25}$$

справедливому для гладких управлений f, удовлетворяющих условию $f(0)=f'(0)=0$.

в) Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$C^T := (W^T)^*W^T,$$

называется *связывающим*; определяющее его соотношение

$$(C^Tf,g)_{\mathcal{F}^T} = (u^f(\cdot,T),u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^{c_1T}} \tag{26}$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Центральной для рассматриваемого подхода (BC-метода) оказывается явная и простая связь оператора C^T с функцией отклика.

Лемма 3. *Оператор C^T есть положительно определенный изоморфизм; для него справедливо представление*

$$(C^T f)(t) = \sqrt{\rho} f(t) + \int_0^T C^T(t,s) f(s) ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{27}$$

в котором $C^T(t,s) = \frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)d\eta$.

Наметим вывод (27), основанный на приеме А. С. Благовещенского (подробности см. в [6]). Пусть f, g – гладкие функции, причем f такова, что ее нечетное продолжение относительно $t = 2T$,

$$f_-(t) := \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ -f(2T-t), & T \leqslant t < 2T; \end{cases}$$

является гладким: $f_- \in C_0^\infty\left([0,2T];\mathbb{R}^2\right)$. Для функции

$$w(s,t) := \int_0^\infty \langle \rho u^f_-(x,s), u^g(x,t)\rangle\, dx, \quad (s,t) \in (0,2T) \times (0,T),$$

имеем равенства:

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) w(s,t) =$$

$$= \int_0^\infty dx \left[\left\langle u^{f_-}(x,s), \rho u^g_{tt}(x,t)\right\rangle - \left\langle \rho u^{f_-}_{ss}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\right] =$$

$$= \int_0^\infty dx \left[\left\langle u^{f_-}(x,s), (Lu^g)(x,t)\right\rangle - \left\langle (Lu^{f_-})(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\right].$$

Интегрируя по частям с учетом финитности u^f и u^g по x, получаем:

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) w(s,t) = \int_0^\infty dx \left[\left\langle u^{f_-}(x,s), u^g_{xx}(x,t)\right\rangle - \left\langle u^{f_-}_{xx}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\right] =$$

$$= -\left\langle u^{f_-}(0,s), u^g_x(0,t)\right\rangle + \left\langle u^{f_-}_x(0,s), u^g(0,t)\right\rangle.$$

Из (12) следует

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) w(s,t) = -\left\langle f_-(s), -\sqrt{\rho} g'(t) + (r * g)(t)\right\rangle +$$

$$+\left\langle -\sqrt{\rho} f'(s) + (r * f)(s), g(t)\right\rangle .$$

Таким образом, для w мы имеем волновое уравнение с правой частью, определяемой функцией отклика. Интегрируя его по Д'Аламберу с учетом условий $w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0$, можно получить представление

$$w(T,T) = (\mathcal{C}^T f, g)_{\mathcal{F}^T} \tag{28}$$

с оператором $\mathcal{C}^T$, определяемым правой частью (27). С другой стороны, из (26) получаем

$$w(T,T) = (u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^{c_1 T}} = (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T}. \tag{29}$$

Сопоставляя (28) с (29), получаем (27).

Лемма 3 устанавливает необходимость условий основной теоремы 1.

1.5. Проекторы $\mathcal{P}^\xi$.

Пусть X_l^T есть ортогональный проектор в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\mathcal{F}_l^T$ (см. п. 1.3); e – оператор вложения $\mathcal{F}_l^T$ в $\mathcal{F}^T$: $(e)^* e = \mathbf{1}$, $ee^* = X_l^T$. Через

$$C_l^T := e^* C^T e$$

обозначим блок оператора C^T в $\mathcal{F}_l^T$; этот блок является, очевидно, положительным изоморфизмом.

В силу леммы 2, сужение

$$W_l^T := W^T|_{\mathcal{F}_l^T}$$

есть изоморфизм $\mathcal{F}_l^T$ на $\mathcal{H}^{c_2 T}$; из (26) следует равенство

$$C_l^T = (W_l^T)^* W_l^T. \tag{30}$$

Фиксируем $\xi \in (0,T)$; обратный изоморфизм $(W_l^T)^{-1}$ переводит ортогональное разложение $\mathcal{H}^{c_2 T} = \mathcal{H}^{c_2 \xi} \oplus \mathcal{H}_\perp^{c_2 \xi}$ в прямую сумму

$$\mathcal{F}_l^{T,\xi} \dot{+} \mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi} = \mathcal{F}_l^T, \tag{31}$$

где $\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi} := (W_l^T)^{-1} \mathcal{H}_\perp^{c_2 \xi}$. Используя соотношения (22), (30), можно проверить равенство

$$\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi} = (C_l^T)^{-1}(\mathcal{F}_l^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi})$$

($\ominus$ – ортогональная разность в $\mathcal{F}^T$). Пусть $P^{c_2\xi}$ есть (орто) проектор в $\mathcal{H}^{c_2T}$ на $\mathcal{H}^{c_2\xi}$; его действие, очевидно, сводится к срезке:

$$(P^{c_2\xi}a)(x) = \begin{cases} a(x), & 0 < x < c_2\xi; \\ 0, & c_2\xi < x < c_2T. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{P}^\xi$ есть (косой) проектор в $\mathcal{F}_l^T$ на $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ параллельно $\mathcal{F}_{l[\perp]}^{T,\xi}$ (операторное представление $\mathcal{P}^\xi$ см. ниже, формула (41)). В соответствии с (31) имеем сплетающее соотношение

$$W_l^T\mathcal{P}^\xi = P^{c_2\xi}W_l^T, \quad 0 < \xi < T. \tag{32}$$

Полезна следующая точка зрения на проекторы $\mathcal{P}^\xi$. Снабдим пространство $\mathcal{F}_l^T$ новой метрикой

$$(f,g)_{\Phi_l^T} := (C_l^T f, g)_{\mathcal{F}_l^T}. \tag{33}$$

Через Φ_l^T обозначим множество $\mathcal{F}_l^T$ снабженное новой нормой. По изоморфности C_l^T, новая и старая нормы эквивалентны. Введем оператор вложения $j : \mathcal{F}_l^T \to \Phi_l^T$. Из определения метрики (33) легко следует, что $W_l^T(j)^{-1}$ есть унитарный оператор из Φ_l^T на $\mathcal{H}^{c_2T}$, а $j\mathcal{P}^\xi(j)^{-1}$ есть *ортогональный* проектор в Φ_l^T на $\Phi_l^{T,\xi} := j\mathcal{F}_l^{T,\xi}$.

Подчеркнем, что проекторы $\mathcal{P}^\xi$ определяются функцией отклика, поскольку последняя определяет метрику в Φ_l^T.

1.6. Амплитудная формула.

Как нетрудно видеть из представления (21) для волнового оператора, разрывным управлениям отвечают разрывные волны и наоборот, причем разрывы управлений и волн связаны простыми соотношениями. Сейчас, опираясь на эту связь, мы выразим значения волн через проекторы $\mathcal{P}^\xi$.

Фиксируем $\xi \in (0,T)$ и выберем гладкое управление $f \in \mathcal{M}^T$; согласно (32) имеем равенство

$$W^T\mathcal{P}^\xi f = P^{c_2\xi}u^f(\cdot,T). \tag{34}$$

Правая часть равенства есть срезка гладкой вектор-функции; эта срезка разрывна при $x = c_2\xi$ и величина разрыва равна $u^f(c_2\xi,T)$. Как видно из (34), сама срезка является волной, порожденной управлением $\mathcal{P}^\xi f$. Простой анализ равенства (21) показывает, что компоненты управления $\mathcal{P}^\xi f$ обязаны иметь разрыв при $t =$

$T-\xi$ и $t = T - \frac{c_2}{c_1}\xi$, причем для величин (амплитуд) разрывов выполнено соотношение

$$\begin{aligned} [(\mathcal{P}^\xi f)_1]_{T-\frac{c_2}{c_1}\xi} &= (u^f(c_2\xi, T))_1, \\ [(\mathcal{P}^\xi f)_2]_{T-\xi} &= (u^f(c_2\xi, T))_2, \end{aligned} \tag{35}$$

где $[g]_{t_0} := g(t_0+0) - g(t_0-0)$ – скачок функции g в точке t_0.

1.7. Обратная задача: восстановление A, B по r, l.

В п.п. 1.2, 1.3 отмечался локальный характер зависимости функции отклика системы (1)–(3) и функции l, определяющей медленные волны, от коэффициентов A, B. Обратное соответствие $r, l \Longrightarrow A, B$ также оказывается локальным в следующем смысле.

Теорема 2. *Пусть A', B' и A'', B'' суть коэффициенты двух систем вида (1)–(3); r', l' и r'', l'' суть их функции отклика и функции, определяющие медленные волны. Тогда при любом $T > 0$ из равенств $r'(t) = r''(t)$, $0 < t < 2T$; $l'(t) = l''(t)$, $0 < t < T - \dfrac{c_2}{c_1}T$, следуют равенства $A'(x) = A''(x)$, $B'(x) = B''(x)$, $0 < x < c_2T$.*

Доказательство. Доказательство дается в форме процедуры, восстанавливающей пару $A(x)$, $B(x)$, в интервале $(0, c_2T)$ по $r(t)$, $0 < t < 2T$ и по $l(t)$, $0 < t < T - \frac{c_2}{c_1}T$:

(i) по функции отклика найдем связывающий оператор в соответствии (27);

(ii) найдем проекторы $\mathcal{P}^\xi$, $0 < \xi < T$;

(iii) формула (35) позволяет восстановить волну $u^f(\cdot, T) \in \mathcal{N}^{c_2T}$ для любого управления $f \in \mathcal{M}^T$, что равносильно нахождению оператора W_l^T (см.(22));

(iv) по (25) восстановим оператор $L = W_l^T \frac{d^2}{dt^2}(W_l^T)^{-1}$ на $\mathcal{N}^{c_2T}$, что равносильно нахождению $A(x)$, $B(x)$ при $0 < x < c_2T$.

Теорема доказана.

Таким образом, функции $r|_{(0,2T)}$, $l|_{(0, T-\frac{c_2}{c_1}T)}$, однозначно определяют коэффициенты A, B на участке $(0, c_2T)$ полуоси $x > 0$, заметаемом *медленными волнами* к моменту $t = T$.

2. Доказательство основной теоремы

2.1. План доказательства.

Напомним, что необходимость условий теоремы 1 уже установлена в лемме 3. Проверка достаточности проводится по следующей схеме:

а) Для заданной матрицы-функции $r(t)$, $0 < t < 2T$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, выберем произвольно скалярную функцию $l(t)$, $0 < t < T - \frac{c_2}{c_1}T$. По паре r, l, следуя процедуре (i)–(iv), будут найдены две матрицы-функции $A(x)$, $B(x)$, $0 < x < c_2 T$.

б) Функции A, B, как коэффициенты, определяют функцию отклика соответствующей 2-ДС вида (1)–(3) при временах $t < 2\frac{c_2}{c_1}T$; будет показано, что эта ф.о. совпадает с $r\big|_{(0,2\frac{c_2}{c_1}T)}$.

в) Исходная функция r продолжается с интервала $(0, 2T)$ на интервал $(0, 2T')$, $T' := \frac{c_1}{c_2}T$ с сохранением положительной определенности оператора (6); функция l произвольно продолжается с интервала $(0, T - \frac{c_2}{c_1}T)$ на $(0, T' - \frac{c_2}{c_1}T')$.

г) Способом, описанным в а), по продолженным r, l находятся коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $0 < x < c_2 T' = c_1 T$, являющиеся продолжениями построенных ранее. Продолженные A, B определяют 2-ДС и соответствующую ф.о. при временах $0 < t < 2T$; показывается, что эта ф.о. совпадает с исходной функцией $r\big|_{(0,2T)}$.

2.2. Пространства и проекторы.

Пусть заданная при $0 \leqslant t \leqslant 2T$ функция $r(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. На интервале $0 \leqslant t \leqslant T - \dfrac{c_2}{c_1}T$ *произвольно* выберем и фиксируем гладкую скалярную функцию $l = l(t)$.

По l в пространстве $\mathcal{F}^T = L^2\left((0,T);\mathbb{R}^2\right)$ определим подпространство $\mathcal{F}_l^T$ и в нем семейство подпространств $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$ (см. п. 1.3). По r определим оператор C^T (см. (6)); пусть C_l^T есть его блок в $\mathcal{F}_l^T$ (см. п. 1.5). Введем в пространстве $\mathcal{F}_l^T$ новую метрику Φ_l^T согласно (33), Поскольку C^T – изоморфизм, то новая метрика эквивалентна исходной.

Введем семейство подпространств $\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi}$

$$\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi} := \left(C_l^T\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_l^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi}\right).$$

Легко видеть, что $\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi}$ есть ортогональное дополнение к $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ в новой метрике, а пространство $\mathcal{F}_l^T$ распадается в прямую сумму

$$\mathcal{F}_l^T = \mathcal{F}_l^{T,\xi} \dot{+} \mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi} \tag{36}$$

с ненулевым углом между подпространствами. Пусть $\mathcal{P}^\xi$ есть (косой) проектор в $\mathcal{F}_l^T$ на $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ параллельно $\mathcal{F}_{l\,[\perp]}^{T,\xi}$. В эквивалентных терминах, $\mathcal{P}^\xi$ есть ортогональный проектор в Φ_l^T на $\Phi_l^{T,\xi}$ (см. п. 1.5). В силу (36) он ограничен в $\mathcal{F}_l^T$.

Опишем, как действуют проекторы $\mathcal{P}^\xi$. Для этого положим $\alpha(\xi) := T - \xi$, $\beta(\xi) := T - \frac{c_2}{c_1}\xi$ и введем операторы свертки

$$(\mathcal{L}^\xi\varphi)(t) := \int\limits_{\alpha(\xi)}^{t} l(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau,\ t \in [\alpha(\xi), \beta(\xi)].$$

Лемма 4. *Для $f \in \mathcal{F}_l^T$ и $\xi \in (0,T)$ справедливо представление*

$$\left(\mathcal{P}^\xi f\right)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant \alpha(\xi), \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L}^\xi f_2 \\ f_2 \end{pmatrix}(t) + \int_0^{\beta(\xi)} P_1(t,s)f(s)\,ds, & \alpha(\xi) < t \leqslant \beta(\xi), \\ f(t) + \int_0^{\beta(\xi)} P_2(t,s)f(s)\,ds, & \beta(\xi) < t \leqslant T, \end{cases} \tag{37}$$

в котором $P_1(t,s)$ и $P_2(t,s)$ суть кусочно гладкие ядра, гладкие вне диагонали $t = s$ и прямой $s = \alpha(\xi)$.

Набросок доказательства. Запишем условия, характеризующие элементы $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ через через оператор $\mathcal{L}^\xi$

$$\mathcal{F}_l^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}_l^T \,|\, f = 0,\ t < \alpha; f_1(t) = (\mathcal{L}^\xi f_2)(t),\ \alpha < t < \beta\}. \tag{38}$$

Используя связь между компонентами функций из $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$, нетрудно показать, что функции из $\mathcal{F}^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi}$ характеризуются соотношениями

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -\left((\mathcal{L}^\xi)^* f_1\right)(t), & \alpha(\xi) < t \leqslant \beta(\xi), \\ f(t) &= \quad 0, & \beta(\xi) < t. \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть $X_l^{T,\xi}$ есть ортопроектор на $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ в пространстве $\mathcal{F}_l^T$. Записывая f в виде $f = f^\xi + f_\perp^\xi$, $f^\xi \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$, $f_\perp^\xi \in \mathcal{F}_l^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi}$, и учитывая соотношения (38), (39), можно получить представление

$$\left(X_l^{T,\xi} f\right)(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant \alpha(\xi), \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L}^\xi \left[\mathbf{1} + (\mathcal{L}^\xi)^*\mathcal{L}^\xi\right]^{-1} \left[(\mathcal{L}^\xi)^* f_1 + f_2\right](t) \\ \left[\mathbf{1} + (\mathcal{L}^\xi)^*\mathcal{L}^\xi\right]^{-1} \left[(\mathcal{L}^\xi)^* f_1 + f_2\right](t) \end{pmatrix}, & \alpha(\xi) < t \leqslant \beta(\xi), \\ f(t), & \beta(\xi) < t < T. \end{cases} \tag{40}$$

Отметим, что входящий в (40) обратный оператор можно представить в виде

$$\left[\mathbf{1}+(\mathcal{L}^{\xi})^{*}\mathcal{L}^{\xi}\right]^{-1}=\mathbf{1}+\mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ – интегральный оператор с кусочно-гладким ядром, гладким вне диагонали.

Будем искать отвечающее (36) разложение $f\in\mathcal{F}_l^T$ в виде

$$f=g^{\xi}+g^{\xi}_{[\perp]},\ g^{\xi}=\mathcal{P}^{\xi}f\in\mathcal{F}_l^{T,\xi},g^{\xi}_{[\perp]}\in\mathcal{F}^{T,\xi}_{l\,[\perp]}.$$

Используя связи между компонентами, характеризующие элементы $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ и $\mathcal{F}^{T,\xi}_{l\,[\perp]}$, можно найти g^{ξ} и $g^{\xi}_{[\perp]}$ и придти к представлению (37). Характер гладкости ядер P_1 и P_2 устанавливается более подробным и весьма громоздким анализом, который мы опускаем.

Проекторы $\mathcal{P}^{\xi}$ допускают полезное операторное представление. Введем оператор вложения e^{ξ} подпространства $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ в $\mathcal{F}_l^T$; при этом $(e^{\xi})^{*}e^{\xi}=\mathbf{1}$; $e^{\xi}(e^{\xi})^{*}=X_l^{T,\xi}$. Отметим, что действие оператора $(e^{\xi})^{*}:\mathcal{F}_l^T\to\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ описывается двумя последними строками (40). Оператор $(e^{\xi})^{*}C_l^Te^{\xi}$ есть блок оператора C_l^T в подпространстве $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$; этот блок является положительным изоморфизмом. Справедливо представление

$$\mathcal{P}^{\xi}=e^{\xi}\left[(e^{\xi})^{*}C_l^Te^{\xi}\right]^{-1}(e^{\xi})^{*}C_l^T. \tag{41}$$

Для проверки достаточно убедиться, что правая часть (41) обладает характеристическими свойствами: $(\mathcal{P}^{\xi})^2=\mathcal{P}^{\xi}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{P}^{\xi}=\mathcal{F}^{T,\xi}_{l\,[\perp]}$, $\operatorname{Ran}\mathcal{P}^{\xi}=\mathcal{F}_l^{T,\xi}$.

2.3. Оператор W_l^T.

В п. 1.6 было установлено соотношение (35), позволяющее восстанавливать волны по проекторам $\mathcal{P}^{\xi}$. Это соотношение мотивирует приводимое ниже определение оператора, который сыграет роль волнового оператора системы, конструируемой по исходной функции r.

Определим оператор $W_l^T:\mathcal{F}_l^T\mapsto\mathcal{H}^{c_2T}$

$$(W_l^Tf)(x):=\left.\begin{pmatrix}\left[(\mathcal{P}^{\xi}f)_1\right]_{\beta(\xi)}\\ \left[(\mathcal{P}^{\xi}f)_2\right]_{\alpha(\xi)}\end{pmatrix}\right|_{\xi=x/c_2},\ 0<x<c_2T; \tag{42}$$

из представления для $\mathcal{P}^\xi$ (37) следует, что W_l^T корректно определен. Используя (37) нетрудно придти к представлению

$$(W_l^T f)(x) = \begin{pmatrix} f_1(T-x/c_1) \\ f_2(T-x/c_2) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{T-x/c_1} w_l(x,t) f(t)\, dt, \qquad (43)$$

с кусочно-гладким матричным ядром w_l, гладким вне характеристики $t = T - x/c_2$.

Введенный оператор W_l^T сплетает $\mathcal{P}^\xi$ с проекторами-срезками (ср. с (32)).

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$W_l^T \mathcal{P}^\xi = P^{c_2\xi} W_l^T, \;\; 0 < \xi < T. \qquad (44)$$

Доказательство. Проверим (44) на гладких функциях. Фиксируем $\xi \in (0, T)$. Поскольку семейство $\mathcal{P}^\xi$ – возрастающее, то при $\xi < x/c_2 =: \tau$ имеем $\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi = \mathcal{P}^\xi$, что влечет

$$(W_l^T \mathcal{P}^\xi f)(x) = \begin{pmatrix} \left[(\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi f)_1\right]_{\beta(\tau)} \\ \left[(\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi f)_2\right]_{\alpha(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(\mathcal{P}^\xi f)_1\right]_{\beta(\tau)} \\ \left[(\mathcal{P}^\xi f)_2\right]_{\alpha(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Для непрерывной f вектор-функция $\mathcal{P}^\xi f$ может иметь разрывы лишь в точках $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$, причем ее первая компонента в $t = \alpha(\xi)$ непрерывна. Следовательно, $(\mathcal{P}^\xi f)_1$ непрерывна в $t = \beta(\tau) < \beta(\xi)$, а вторая компонента $(\mathcal{P}^\xi f)_2$ равна нулю в окрестности $t = \alpha(\tau) < \alpha(\xi)$. Поэтому скачки в правой части последнего равенства суть нулевые и

$$(W_l^T \mathcal{P}^\xi f)(x) = 0, \quad x > c_2\xi. \qquad (45)$$

Аналогично, при $\xi > x/c_2 = \tau$ получаем $\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi = \mathcal{P}^\tau$, что влечет

$$(W_l^T \mathcal{P}^\xi f)(x) = \begin{pmatrix} \left[(\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi f)_1\right]_{\beta(\tau)} \\ \left[(\mathcal{P}^\tau \mathcal{P}^\xi f)_2\right]_{\alpha(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(\mathcal{P}^\tau f)_1\right]_{\beta(\tau)} \\ \left[(\mathcal{P}^\tau f)_2\right]_{\alpha(\tau)} \end{pmatrix},$$

то есть,

$$(W_l^T \mathcal{P}^\xi f)(x) = (W_l^T f)(x), \;\; x < c_2\xi. \qquad (46)$$

Из (45), (46) получаем (44). Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$C_l^T = (W_l^T)^* W_l^T. \tag{47}$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\xi \in (0,T)$. Из (44) получаем, умножая справа на $(C_l^T)^{-1}(W_l^T)^*$:

$$W_l^T \mathcal{P}^\xi (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^* = P^\xi W_l^T (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^*. \tag{48}$$

С другой стороны, умножая соотношение, сопряженное к (44), слева на $W_l^T(C_l^T)^{-1}$, получаем

$$W_l^T (C_l^T)^{-1}(\mathcal{P}^\xi)^*(W_l^T)^* = W_l^T (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^* P^\xi. \tag{49}$$

Используя (41) легко показать, что

$$C_l^T \mathcal{P}^\xi = (\mathcal{P}^\xi)^* C_l^T,$$

откуда

$$\mathcal{P}^\xi (C_l^T)^{-1} = (C_l^T)^{-1}(\mathcal{P}^\xi)^*. \tag{50}$$

Теперь из (50) следует, что левые части (48), (49) совпадают. Поэтому оператор

$$\Theta := W_l^T (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^*$$

коммутирует с P^ξ. Из коммутации, по Спектральной Теореме [3], вытекает, что Θ есть оператор умножения на матрицу-функцию. С другой стороны, из вида операторов W_l^T, C_l^T, $(W_l^T)^*$ (см. (6), (43)) можно получить представление

$$W_l^T (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^* = \mathbf{1} + \text{Интегральный оператор}.$$

Очевидно, что это возможно лишь при $\Theta = \mathbf{1}$. Лемма доказана.

Отметим, что (47) означает, что W_l^T является унитарным оператором в Φ_l^T-метрике (ср. с п. 1.5).

Лемма 7. *Оператор W_l^T является изоморфизмом $\mathcal{F}_l^T$ на $\mathcal{H}^{c_2T}$ и при любом $\xi \in [0,T]$ выполнено равенство*

$$W_l^T \mathcal{F}_l^{T,\xi} = \mathcal{H}^{c_2\xi}. \tag{51}$$

Доказательство. Как видно из (43), оператор W_l^T представляет собой сумму изоморфного отображения и компактного оператора. В силу этого $\mathrm{Ran} W_l^T$ замкнут, а дефект $\mathcal{H}^{c_2T} \ominus \mathrm{Ran} W_l^T =$

$\mathrm{Ker}(W_l^T)_l^*$, не более чем конечномерен. Покажем, что ненулевой дефект невозможен. Из (44) следует, что

$$(\mathcal{P}^\xi)^*(W_l^T)^* = (W_l^T)^* P^\xi, \quad 0 < \xi < T,$$

откуда вытекает инвариантность подпространства $\mathrm{Ker}\,(W_l^T)^*$ относительно срезок P^ξ. Поскольку это подпространство конечномерно, то оно может быть при этом только нулевым и, значит, $\mathrm{Ran} W_l^T = \mathcal{H}^{c_2 T}$. В силу предположения теоремы 1, C_l^T является изоморфизмом, и тогда (47) дает $\mathrm{Ker}\, W_l^T = \{0\}$. Следовательно, W_l^T – изоморфизм.

Проверим (51). Из сплетения (44) вытекает включение $W_l^T \mathcal{F}_l^{T,\xi} \subset \mathcal{H}^{c_2\xi}$. Пользуясь изоморфизмом W_l^T, умножим (44) на $(W_l^T)^{-1}$ слева и справа, получаем

$$\mathcal{P}^\xi (W_l^T)^{-1} = (W_l^T)^{-1} P^\xi,$$

что дает $(W_l^T)^{-1}\mathcal{H}^{c_2\xi} \subset \mathcal{F}_l^{T,\xi}$, то есть, противоположное включение. Лемма доказана.

Нам далее понадобится

Лемма 8. *Для любой функции $f \in C\left([0,T];\mathbb{R}^2\right) \cap \mathcal{F}_l^T$ справедливо соотношение*

$$(W_l^T f)(+0) = f(T). \tag{52}$$

Доказательство. Покажем, что проектор $\mathcal{P}^\xi$ может быть записан в виде

$$\mathcal{P}^\xi = X_l^{T,\xi} + K^\xi, \tag{53}$$

где K^ξ есть интегральный оператор с кусочно-гладким ядром. В самом деле, для блока оператора C_l^T имеем

$$(e^\xi)^* C_l^T e^\xi = \sqrt{\rho}\mathbf{1} + K_1^\xi;$$

соответственно, обратный к нему имеет представление

$$\left[(e^\xi)^* C_l^T e^\xi\right]^{-1} = \sqrt{\rho^{-1}}\mathbf{1} + K_2^\xi. \tag{54}$$

Обращаясь к операторному представлению (41) проектора $\mathcal{P}^\xi$ и учитывая соотношение $e^\xi(e^\xi)^* = X_l^{T,\xi}$, нетрудно придти к (53).

Рассмотрим полученное представление при $\xi \to 0$. Из вида (6) оператора C^T имеем

$$C^T(T,s) = 0, s \in [0,T]. \tag{55}$$

Поскольку оператор K_1^ξ определяется значениями ядра $C^T(T,s)$ при $\alpha(\xi)<t<T$ (то есть при t близких к T), то норма оператора K_1^ξ, как оператора в $L^\infty\left((\alpha(\xi),T);\mathbb{R}^2\right)$ есть $o(1)$ при $\xi\to 0$. Последнее влечет $\|K_2^\xi\| = o(1)$, что приводит к асимптотике $\|K^\xi\|_\infty = o(1)$.

Выберем непрерывную функцию f и рассмотрим $(W_l^T f)(x)$ при $x\to 0$ (см. определение (42)). Из представления (40), с учетом малости $\|\mathcal{L}^\xi\|_\infty$, нетрудно получить

$$\left(X_l^{T,\xi} f\right)(t) = \begin{cases} 0, & 0<t\leqslant\alpha(\xi),\\ \begin{pmatrix} 0\\ f_2\end{pmatrix} + o(1), & \alpha(\xi)<t\leqslant\beta(\xi),\\ f(t), & \beta(\xi)<t<T.\end{cases}$$

Теперь равенство (52) извлекается из асимптотики $\mathcal{P}^\xi = X_l^{T,\xi} + o(1)$. Лемма доказана.

2.4. Оператор $(W_l^T)^{-1}$.

Введем обозначения. Пусть функция $b=b(x)$ задана на интервале $(0,c_2T)$; через $\tilde b(t)$ обозначим продолжение b нулем на $[c_2T,\infty)$. Для вектор-функции $a(x)$, $0<x<c_2T$ положим

$$\hat a(t) := \begin{pmatrix} \tilde a_1\left(c_1(T-t)\right)\\ a_2\left(c_2(T-t)\right)\end{pmatrix}, \quad 0<t<T.$$

Лемма 9. *Справедливо представление*

$$\left((W_l^T)^{-1}a\right)(t) = \hat a(t) + \int\limits_{c_2(T-t)}^{c_2T} w^{(-1)}(t,x)a(x)\,dx, \tag{56}$$

с матричным ядром $w^{(-1)}$, гладким вне характеристики $t=T-x/c_1$.

Схема доказательства. Из представления (43) несложно получить вид сопряженного оператора

$$\left((W_l^T)^*a\right)(t) = \sqrt{\rho}\hat a(t) + \int\limits_0^{c_2T} w^*(t,x)a(x)\,dx,$$

с ядром, гладким вне характеристик $t=T-x/c_1$, $t=T-x/c_2$, и вне прямой $t=\beta(T)=T-\dfrac{c_2}{c_1}T$.

Из (47) имеем

$$(W_l^T)^{-1} = (C_l^T)^{-1}(W_l^T)^*;$$

используя (54) (при $\xi = T$) для $(C_l^T)^{-1}$, нетрудно получить представление

$$\left((W_l^T)^{-1}a\right)(t) = \hat{a}(t) + \int\limits_0^{c_2T} w^{(-1)}(t,x)a(x)\,dx, \tag{57}$$

с ядром $w^{(-1)}$ гладким там же, где и w^*.

Из леммы 7 имеем $(W_l^T)^{-1}\mathcal{H}^{c_2\xi} = \mathcal{F}_l^{T,\xi}$, $\xi < T$, что возможно лишь в том случае когда нижний предел в интеграле равен $c_2(T-t)$.

Покажем, что ядро $w^{(-1)}$ является гладким при $t = \beta(T)$. Доказательство проведем от противного: пусть $w^{(-1)}(t,s)$ имеет на прямой $t = \beta(T)$ разрыв первого рода (случай разрыва производных рассматривается аналогично). Тогда найдется гладкая функция $a = a(x)$, аннулирующаяся вблизи $x = c_2T$ (то есть, $a \in \mathcal{H}^{c_2\xi}$ с некоторым ξ) и такая, что функция $f = (W_l^T)^{-1}a$ имеет при $t = \beta(T)$ разрыв первого рода. В силу леммы 7 $f \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$; поэтому при $t < \beta(T)$ компоненты функции f будут связаны сверткой. Следовательно, разрывной при $t = \beta(T)$ будет только компонента f_2, а компонента f_1 окажется непрерывной. Из представления (43) для прямого оператора W_l^T имеем

$$a_2(x) = f_2(T - x/c_2) + \int\limits_0^{T-x/c_1} [w(x,t)f(t)]_2\,dt,$$

и при отмеченном характере гладкости компонент f компонента a_2 имеет разрыв в точке $x = \dfrac{c_2^2}{c_1}T$, что противоречит предположению о гладкости a. Лемма доказана.

Напомним, что гладкие линеалы в $\mathcal{F}_l^T$ и $\mathcal{H}^{c_2T}$ введены в п. 1.4 определением (23). Полезным следствием представлений (43), (56) оказывается такой результат.

Лемма 10.

$$W_l^T\mathcal{M}^{T,\xi} = \mathcal{N}^{c_2\xi},\ W_l^T\mathcal{M}^T = \mathcal{N}^T. \tag{58}$$

Доказательство. Разбивая интеграл в (43) на интегралы по промежуткам $[0, T - x/c_2]$ и $[T - x/c_2, T - x/c_1]$, получим представление интегральной части W_l^T в виде интегральных операторов с гладкими ядрами; из этого представления легко следует включение $W_l^T \mathcal{M}^{T,\xi} \subset \mathcal{N}^{c_2\xi}$. Тем же приемом для оператора $(W_l^T)^{-1}$ устанавливается обратное включение. Лемма доказана.

2.5. Оператор L.

Введем оператор $L : \mathcal{H}^{c_2T} \mapsto \mathcal{H}^{c_2T}$, $\mathrm{Dom}L = \mathcal{N}^T$ (см. (24)).

$$L := W_l^T \frac{d^2}{dt^2} (W_l^T)^{-1} \tag{59}$$

Убедимся в корректности этого определения. Поскольку компоненты функций $\varphi \in \mathcal{M}^T$ связаны сверткой, то линеалы $\mathcal{M}^{T,\xi}$, $\mathcal{M}^T$ инвариантны относительно дифференцирования по t:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}^{T,\xi} \subset \mathcal{M}^{T,\xi}. \tag{60}$$

Поэтому функции из $\frac{d^2}{dt^2}(W_l^T)^{-1}\mathcal{N}^T = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{M}^T$ попадают в область определения оператора W_l^T.

Лемма 1. *Для оператора L справедливо представление*

$$L = \rho^{-1} \left[\frac{d^2}{dx^2} - A(x) \frac{d}{dx} - B(x) \right] \tag{61}$$

с гладкими коэффициентами A, B удовлетворяющими условиям (4).

Схема доказательства. Подставляя (43), (56) в (60) и интегрируя по частям, в результате весьма длинных выкладок получаем:

$$\begin{gathered} \Big(La\Big)(x) = \rho^{-1} \Big[\frac{d^2}{dx^2} a(x) - A(x) \frac{d}{dx} a(x) - B(x) a(x) + \\ + E_1(x) \tilde{a}(\frac{c_1}{c_2} x) E_2(x) \frac{d}{dx} \tilde{a}(\frac{c_1}{c_2} x) + G_1(x) a(\frac{c_2}{c_1} x) G_2(x) \frac{d}{dx} a(\frac{c_2}{c_1} x) + \\ + \int_0^{c_2T} Z(x,\xi) a(\xi)\, d\xi \Big], \end{gathered} \tag{62}$$

($\tilde{a}$ определено в п. 2.4), где A, B, E_1, E_2, G_1, G_2 суть гладкие на $[0, c_2T]$ матрицы-функции, а ядро Z является гладким вне прямых $x = \xi$, $x = \frac{c_1}{c_2}\xi$, и $x = \frac{c_2}{c_1}\xi$.

Покажем, что $E_1 = E_2 = G_1 = G_2 \equiv 0$; $Z \equiv 0$. Этот факт будет следовать из локальности оператора L понимаемой в следующем смысле: включение $\operatorname{supp} a \subset [x_1, x_2] \subset [0, c_2T]$, влечет $\operatorname{supp} La \subset [x_1, x_2]$. Проверим локальность.

Из определения L и соотношений (58), (60) получаем, что $L\mathcal{N}^{c_2\xi} \subset \mathcal{N}^{c_2\xi}$, то есть, L не расширяет носитель функций *вправо*.

Покажем, что он не расширяет носитель функций *влево*. Выберем $a : \operatorname{supp} a \subset [c_2\xi, c_2T]$, то есть $a \perp \mathcal{H}^{c_2\xi}$. Возьмем функцию $f \in \mathcal{M}^{T,\xi}$, аннулирующуюся вблизи $t = T$; множество таких функций f плотно в $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$. Из плотности вытекает, что образы $W_l^T f$ плотны в $\mathcal{H}^{c_2\xi}$. Для $g := (W_l^T)^{-1}a$, имеем равенства

$$\begin{gathered}(W_l^T f, La)_{\mathcal{H}^{c_2T}} =< \text{см. } (59) >= \\ = (W_l^T f, W_l^T \frac{d^2}{dt^2} g)_{\mathcal{H}^{c_2T}} =< \text{см. } (47) >= (C_l^T f, \frac{d^2}{dt^2} g)_{\mathcal{F}_l^T}.\end{gathered} \tag{63}$$

Из представления (6) оператора C^T, учитывая (55), (40), получаем $(C_l^T f)(T) = (C^T f)(T) = \sqrt{\rho} f(T) = 0$. Из (52) имеем $g(T) = a(0) = 0$; кроме того f и g аннулируются вблизи $t = 0$ как элементы линеала $\mathcal{M}^T$. Из приведенных свойств f и g интегрированием по частям выводится равенство

$$(C_l^T f, \frac{d^2}{dt^2} g)_{\mathcal{F}_l^T} = (C_l^T \frac{d^2}{dt^2} f, g)_{\mathcal{F}_l^T}. \tag{64}$$

Из (63), (64) имеем

$$(W_l^T f, La)_{\mathcal{H}^{c_2T}} = (C_l^T \frac{d^2}{dt^2} f, g)_{\mathcal{F}_l^T} = (W_l^T \frac{d^2}{dt^2} f, a)_{\mathcal{H}^{c_2T}} = 0$$

в силу (58), (60). Отсюда $La \perp \mathcal{H}^{c_2\xi}$; следовательно, $\operatorname{supp} La \subset [c_2\xi, c_2T]$, то есть, оператор L не расширяет носитель функции *влево*.

Итак, L – локальный оператор; из локальности легко следует, что в представлении (62) аннулируются все члены кроме первых трех.

Проверим симметричность L. Выберем u, v принадлежащие $\mathcal{N}^T$ и удовлетворяющие условиям $u(0) = v(0) = 0$. Если положить $f = (W_l^T)^{-1}u$, $g = (W_l^T)^{-1}v$, то из (52) следует, что $f(T) = g(T) = 0$; кроме того, f и g аннулируются вблизи $t = 0$ как элементы $\mathcal{M}^T$. Интегрируя по частям можно показать, что для таких f и

g выполнено соотношение (64), в силу которого

$$(Lu, v)_{\mathcal{H}^{c_2T}} = (C^T \frac{d^2}{dt^2} f, g)_{\mathcal{F}_l^T} = (C^T f, \frac{d^2}{dt^2} g)_{\mathcal{F}_l^T} = (u, Lv)_{\mathcal{H}^{c_2T}}.$$

Следовательно, оператор L самосопряжен по Лагранжу. Последнее возможно только в том случае, когда коэффициенты A и B удовлетворяют соотношению (4). Лемма доказана.

2.6. Двухскоростная система.

Обозначим $T_0 := \frac{c_2}{c_1} T$; по найденным при $0 < x < c_2 T$ коэффициентам A, B составим систему вида (7)–(9)

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + A u_x + B u = 0, \quad 0 < x < c_1 T_0,\ 0 < t < 2T_0 - \frac{x}{c_1}; \tag{65}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \tag{66}$$

$$u|_{x=0} = f; \tag{67}$$

пусть $u = \tilde{u}^f(x,t)$ есть ее решение; $\tilde{r}(t)$, $0 < t < 2T_0$ – функция отклика; $\tilde{W}^{T_0}$, $\tilde{C}^{T_0}$ суть волновой и связывающий операторы соответствующей 2-ДС. Покажем, что $\tilde{r} = r|_{(0,2T_0)}$.

Рассмотрим вспомогательные операторы: $\pi^{TT_0} : \mathcal{F}^{T_0} \to \mathcal{F}_l^T$,

$$\left(\pi^{TT_0} f\right)(t) := \begin{cases} 0, & 0 < t < T - T_0; \\ f\left(t - (T - T_0)\right), & T - T_0 < t < T; \end{cases}$$

$\mathcal{T}_{T-\tau}^T : \mathcal{F}_l^T \to \mathcal{F}_l^T$ (τ – параметр: $0 < \tau < T_0$),

$$\left(\mathcal{T}_{T-\tau}^T f\right)(t) := f\left(t - (T - \tau)\right),\ 0 < t < T \quad (0 < \tau < T_0)$$

(напомним, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$); отметим, что композиция $\mathcal{T}_{T-\tau}^T \pi^{TT_0} : \mathcal{F}^{T_0} \to \mathcal{F}_l^T$ корректно определена. Определим функцию

$$u^f(x,\tau) := \left(W_l^T \mathcal{T}_{T-\tau}^T \pi^{TT_0} f\right)(x),\ 0 < x < c_2 T = c_1 T_0 \quad (0 < \tau < T_0);$$

используя (59), (61), нетрудно показать, что она удовлетворяет системе

$$\rho u_{\tau\tau} - u_{xx} + A u_x + B u = 0, \quad 0 < x < c_1 T_0,\ 0 < t < T_0; \tag{68}$$

$$u|_{\tau=0} = u_\tau|_{\tau=0} = 0; \tag{69}$$

$$u|_{x=0} = f; \tag{70}$$

при этом граничное условие (70) следует из (52). Из задач (65)–(67) и (68)–(70) видно, что при совпадении управлений при $0 < t < T_0$ решения $\tilde{u}^f$ и u^f совпадают при $(x,t) \in (0, c_1 T_0) \times (0, T_0)$. Из равенства решений вытекает операторное равенство

$$\tilde{W}^{T_0} = W_l^T \pi^{TT_0},$$

по которому имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{C}^{T_0} = (\tilde{W}^{T_0})^* \tilde{W}^{T_0} = (\pi^{TT_0})^* (W_l^T)^* W_l^T (\pi^{TT_0})^* =< \text{см. } (47) >= \\ = (\pi^{TT_0})^* C_l^T (\pi^{TT_0})^* = (\pi^{TT_0})^* C^T (\pi^{TT_0})^*.\end{aligned} \tag{71}$$

Это соотношение показывает. что $\tilde{C}^{T_0}$ совпадает с блоком C^T в подпространстве $\mathcal{F}^{T,T_0} := L^2\left((T_0,T);\mathbb{R}^2\right)$. Выражая $\tilde{C}^{T_0}$ через ф.о. $\tilde{r}$ (см. (27)) и используя представление (6) для C^T, из (71) имеем:

$$\sqrt{\rho} f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} \tilde{r}(\eta) d\eta \right] f(s) ds =$$

$$= \sqrt{\rho} f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \ \ 0 < t < T_0,$$

при любом $f \in \mathcal{F}^{TT_0}$. Следовательно, ядра интегральных операторов совпадают, откуда легко выводится

$$\tilde{r}(t) = r(t), \ \ 0 < t < 2T_0 = 2\frac{c_2}{c_1}T.$$

Итак, по исходной функции $r(t)$, $0 < t < 2T$, сконструирована 2-ДС (68)–(70), обладающая функцией отклика, совпадающей с r при временах $t < 2\dfrac{c_2}{c_1}T$. Предположим, что нам удалось продолжить r с $[0, 2T]$ на $[0, 2T']$ при $T' := \frac{c_1}{c_2}T$ с сохранением условий теоремы 1, то есть таким образом что оператор $C^{T'}$ положительно определен в $\mathcal{F}^{T'}$. Такие продолжения мы будем называть *эрмитово-положительными*. В таком случае, повторяя процедуру п.п. 2.2–2.6, мы построим 2-ДС, функция отклика которой совпадает с r уже при $t < 2\frac{c_2}{c_1}T' = 2T$. Следовательно, доказательство теоремы 1 сведено к вопросу о существовании указанного продолжения. Отметим, что вопрос восходит к проблеме продолжения эрмитово–положительных функций [8].

2.7. Односкоростная ДС.

Для эрмитово-положительного продолжения r используется вспомогательная система вида

$$u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, \quad x > 0,\ t > 0; \tag{72}$$

$$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0; \tag{73}$$

$$u|_{x=0} = f; \tag{74}$$

здесь $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и V – гладкая симметричная 2×2-матрица-функция (*потенциал*). Приведем известные факты.

Система (72)–(74) имеет фундаментальное решение

$$U_0(x,t) = \delta(t-x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{U}_0(x,t);$$

ее ф.о. $r_0(t) := \tilde{U}_{0\,x}(0,t)$, $t > 0$ является гладкой и симметричной. По гиперболичности (72) значения $r_0(t)$ при $0 < t < 2T$ определяются значениями $V(x)$ при $0 < x < T$. Решить обратную задачу, т.е. восстановить $V|_{(0,T)}$ по $r|_{(0,2T)}$ можно с помощью классической техники уравнений Гельфанда–Левитана–М. Крейна [4] или BC-методом [1]. Для односкоростных систем известна характеризация ф.о. задачи (72)–(74).

Теорема 3. *Пусть $T > 0$. Заданная при $0 < t < 2T$ гладкая симметричная матрица-функция является функцией отклика системы (72)–(74) в том и только в том случае, если определяемый ею оператор $\mathcal{C}_0^T$:*

$$(\mathcal{C}_0^T f)(t) = f(t) + \int_0^T \mathcal{C}_0^T(t,s) f(s)\,ds, \quad 0 < t < T \tag{75}$$

с ядром

$$\mathcal{C}_0^T(t,s) := \frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{2T-t-s} r_0(\eta)\,d\eta$$

положительно определен в $L^2((0,T);\mathbb{R}^2)$.

Этот результат извлекается из работы [4], в которой получена характеризация данных динамической обратной задачи рассеяния; используя простую связь ф.о. и данных рассеяния можно получить описание ф.о., приведенное выше. Имеется и другой способ доказать теорему 3. Для этого достаточно повторить для системы (72)–(74) схему п.п. 2.1–2.5, причем рассмотрения существенно упрощаются.

2.8. Продолжение данных. Пусть функция $r(t)$, $0 < t < 2T$ такова, что оператор C^T (см. (6)) положительно определен; пусть $T' > T$ – произвольно заданное число. Процедура продолжения r состоит в следующем:

(i) по r найдем функцию $r_0(t) = \rho^{-1/4} r(t) \rho^{-1/4}$, $0 < t < 2T$; отвечающий ей оператор $C_0^T = \rho^{-1/4} C^T \rho^{-1/4}$ имеет вид (75) и положительно определен;

(ii) по теореме 3 функция отклика $r_0|_{(0,2T)}$ определяет потенциал $V|_{(0,T)}$ системы (72)–(74). Найдем V, решив соответствующую обратную задачу;

(iii) выберем гладкое продолжение V' потенциала $V|_{(0,T)}$ на интервал $0 < x < T'$; потенциалу $V'|_{(0,T')}$ отвечает ф.о. $r_0'|_{(0,2T')}$ системы (72)–(74), являющаяся расширением r_0; функции отклика r_0' отвечает положительно определенный оператор $C_0^{T'}$;

(iv) функция $r'(t) := \rho^{1/4} r_0'(t) \rho^{1/4}$, $0 < t < 2T'$, совпадает с r при $0 < t < 2T$; ей соответствует положительно определенный оператор $C^{T'} = \rho^{1/4} C_0^{T'} \rho^{1/4}$; то есть мы построили эрмитово-положительное продолжение r.

Доказательство теоремы 1 завершено.

2.9. Комментарии. Из наших рассмотрений следует, что пар $\{A, B\}|_{(0,c_1T)}$, которым отвечает одна и та же ф.о. $r|_{(0,2T)}$ бесконечно много. Каждая такая пара определяется, во первых, эрмитово-положительным продолжением r на дополнительный промежуток $(2T, 2\frac{c_1}{c_2}T]$ и, во вторых, выбором функции l на промежутке $(0, \frac{c_1}{c_2}T - T)$. Короче говоря, пары A, B параметризуются продолжением r и выбором l. Этот факт согласуется с известным в обратных задачах принципом подсчета параметров: пара A, B, удовлетворяющая условию (4) и пара r, l описываются одним и тем же числом независимых скалярных функций (четырьмя).

В связи с упомянутым принципом естествен следующий вопрос: можно ли по ф.о. восстановить пару вида $(0, B)$ с симметричным B. Здесь мы хотели бы анонсировать следующий результат "в малом".

Теорема 4. *Пусть двум парам* $(0, B')|_{(0,c_1T)}$ *и* $(0, B'')|_{(0,c_1T)}$ *отвечает одна и та же функция отклика* $r|_{(0,2T)}$*; тогда существует (достаточно малое)* x_**, такое, что* $B'(x) = B''(x)$, $0 < x < x_*$.

Литература

1. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения* $y_{tt} - y_{xx} + v(x)y = 0$. *Матем.сборник*, **182(3)** (1991), 307–331.
2. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. Докл. АН СССР*, **297** (1987), 524–527.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд-во Ленгосуниверситета, Ленинград, 1980.
4. А. С. Благовещенский, *О локальном подходе к решению динамической обратной задачи для неоднородной струны. Труды МИАН В.А. Стеклова*, **115** (1971), 28–38.
5. А. С. Благовещенский, *О несамосопряженной обратной краевой задаче в матричной форме для гиперболического дифференциального уравнения. Проблемы Мат. Физ.*, вып. 5 (1971) 38–61.
6. A. S. Blagoveschenskii, M. I. Belishev, and S. A. Ivanov, *The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems. Wave Motion*, **25(1)** (1997), 83–107.
7. М. Г. Крейн, *Об одном методе эффективного решения краевой задачи обратной. ДАН СССР*, **94(6)** (1954), 987–990.
8. М. Г. Крейн, *О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. ДАН СССР*, **26(1)** (1940).
9. Л. П. Нижник, *Обратная задача рассеяния для гиперболических уравнений.* Наукова Думка, Киев, 1991.

Belishev M. and Ivanov S. Characterization of data in the dynamical inverse problem for two-velocity system.

Dynamical inverse problem for a class of dynamical systems with two types of waves, which propagate with different velocities interacting with one another, is under consideration. A characteristic description of the inverse data (response function of system) is obtained; the set of systems which have a given response function is described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 июля 1999 г.