В докладе речь пойдет о существовании решений системы квазилинейных PDE

$$-\Delta_p u_1 = |u_1|^{q-2}u_1 + \beta|u_1|^{r-2}|u_2|^r u_1 \tag{1}$$

$$-\Delta_p u_2 = |u_2|^{q-2}u_2 + \beta|u_1|^{r}|u_2|^{r-2} u_2 \tag{2}$$

$$u_j = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{3}$$

где $q \in (p, p^*)$, $r \in (p/2, p^*/2) \cap [1, \infty)$, $\beta > 0$ и $\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Очевидно, что система (1) – (3) имеет нулевое решение. Оказывается, что это решение не единственно и интерес в приложениях представляют ненулевые решения этой системы и особенно решения, у которых обе компоненты отличны от нуля (нетривиальные решения). Существование таких решений можно доказать, например, исследуя критические точки функционала энергии

$$I[u_1, u_2] = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{p}|\nabla u_1|^p + \frac{1}{p}|\nabla u_2|^p - \frac{1}{q}|u_1|^q - \frac{1}{q}|u_2|^q - \frac{\beta}{r}|u_1|^r|u_1|^r\right] dx. \tag{4}$$

Известные методы позволяют находить критические точки с индексами Морса 0 (то есть минимумы) и 1.

В работе доказывается существование нетривиальных решений при некоторых условиях на n, p, q, r, β. Один из результатов состоит в доказательстве существования критических точек функционала энергии с индексом Морса 2.