САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ
"ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект «Инновационная образовательная среда в классическом университете»

Пилотный проект № 22 «Разработка и внедрение
инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет
кафедра высшей математики и математической физики

В.А.Слоущ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ
ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ И ЭКЗАМЕНОВ
БАЗОВЫЙ ПОТОК. I СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007г.

- Рецензент: проф., д.ф.м.н. Бирман М.Ш.
- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ
ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ И ЭКЗАМЕНОВ. БАЗОВЫЙ ПОТОК.
I СЕМЕСТР. — СПб., 2007

В учебнометодическом пособии собраны простейшие задания, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на коллоквиуме и экзамене первого семестра по курсу "Высшая алгебра". Пособие предназначено для студентов первого курса.

Пособие разбито на две части, соответствующие программам осеннего коллоквиума и экзамена зимней сессии. В начале каждой части помещена программа соответсвующего ей коллоквиума или экзамена. В каждой части задания объединены по темам. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения. В данное пособие включены только простейшие задачи по курсу "Высшая алгебра"; умение решать такие задачи обязательно для получения удовлетворительной оценки на коллоквиуме и экзамене. Настоящее пособие не содержит краткого изложения основных понятий и фомул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [1], [2]). Частично, впрочем, такая информация приведена в решениях задач.

Ниже системы координат предполагаются правыми, прямоугольными, с одинаковым масштабом на осях.

Обозначения

- $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты правой прямоугольной системы координат;
- $(\vec{a}, \overset{\wedge}{\vec{b}})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- $(\vec{a}, \vec{b})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в случае векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ имеется в виду стандартное скалярное произведение);
- $|\vec{a}|$ ($\|\vec{a}\|$) — модуль (норма) вектора $\vec{a}$;
- $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ — проекция вектора $\vec{b}$ на ненулевой вектор $\vec{a}$;
- $K_{\vec{a}}\vec{b}$ — компонента вектора $\vec{b}$ по ненулевому вектору $\vec{a}$;
- $\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Часть I

Программа осеннего коллоквиума

1. Векторная алгебра

1.1. Направленный отрезок. Понятие вектора. Длина вектора.
1.2. Линейные операции над векторами (сложение, умножение на число), их свойства.
1.3. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Критерий коллинеарности и компланарности.
1.4. Базисы на плоскости и в пространстве. Координаты вектора.
1.5. Прямоугольные декартовы системы координат.
1.6. Компонента вектора по оси. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов, его свойства.
1.7. Формулы для скалярного произведения векторов и косинуса угла между векторами в декартовых координатах.
1.8. Определители второго и третьего порядка.
1.9. Понятие ориентации. Правые и левые тройки векторов, правые и левые системы координат в физике.
1.10. Векторное произведение, его свойства.
1.11. Выражение векторного произведения в декартовых координатах.
1.12. Смешанное произведение.
1.13. Двойное векторное произведение.

2. Прямая на плоскости

2.1. Общее уравнение прямой на плоскости.
2.2. Уравнение прямой в отрезках на осях. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку.
2.3. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
2.4. Расстояние от точки до прямой.
2.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2.6. Взаиморасположение двух прямых на плоскости.
2.7. Каноническое уравнение и параметрические уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

3. Прямая и плоскость в пространстве

3.1. Общее уравнение плоскости в пространстве. Уравнение связки плоскостей, проходящих через заданную точку.
3.2. Уравнение плоскости в отрезках на осях. Нормальное уравнение плоскости.
3.3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
3.4. Взаиморасположение двух плоскостей.
3.5. Общие уравнения прямой в пространстве.
3.6. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
3.7. Взаиморасположение двух прямых в пространстве.
3.8. Взаиморасположение прямой и плоскости.

Задачи с решениями к осеннему коллоквиуму

Векторы

1.Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(1,3,2)$, $B(5,8,-1)$.
Решение. Поскольку координаты вектора равны разности соответствующих координат конца и начала вектора, получаем $\overrightarrow{AB}=(5-1,8-3,-1-2)=(4,5,-3)$.
2. Нормировать вектор $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.
Решение. Нормировать вектор $\vec{a}$ означает найти вектор $\vec{e}_{\vec{a}}$ единичной длины, сонаправленный с вектором $\vec{a}$. Вектор $\vec{e}_{\vec{a}}$ может быть найден по формуле

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

где модуль вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ дается равенством $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. Окончательно получаем

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{i}-\frac{4}{\sqrt{26}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{26}}\vec{k}.$$

3. Ортогональны ли векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$?
Решение. Для проверки ортогональности векторов, вычислим их скалярное произведение. Напомним, что для векторов $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ скалярное произведение вычисляется

по формуле

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

В данном случае

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{i} - 2\vec{k}, -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 1\cdot(-2) + 0\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

4. Для векторов $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ вычислить:

a) $(\vec{a},\vec{b})$;

b) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$;

c) $cos\ (\vec{a},\overset{\wedge}{}\vec{b})$;

d) $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$;

e) $K_{\vec{a}}\vec{b}$.

Решение. Из формул для скалярного произведения векторов и модуля вектора получаем

$$(\vec{a},\vec{b}) = (-2)\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 = 8,$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6.$$

Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть выражен через скалярное произведение и модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\ (\vec{a},\overset{\wedge}{}\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}.$$

Проекция вектора $\vec{b}$ на ненулевой вектор $\vec{a}$ находится следующим образом:

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|}(\vec{b},\vec{a}) = \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{8}{3}.$$

Компонента вектора $\vec{b}$ по ненулевому вектору $\vec{a}$ имеет вид

$$K_{\vec{a}}\vec{b} = \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{8}{3}\,\frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} = -\frac{16}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{16}{9}\vec{k}.$$

5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и вычислить площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы.

Решение. Векторное произведение векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ вычисляется по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) - \vec{j}(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + \vec{k}(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1)) =$$

$$= -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Площадь $S_{\vec{a},\vec{b}}$ параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Таким образом $S_{\vec{a},\vec{b}} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

6. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, и вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. Смешанное произведение векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ вычисляется по формуле

$$([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Объём $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ есть модуль их смешанного произведения. В итоге получаем $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c})| = |-24| = 24$.

7. Для векторов $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ вычислить произведения: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{C}) - \overrightarrow{C}(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}).$$

Учитывая равенства $(\vec{a}, \vec{c}) = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = -2$, получим

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 1\vec{b} - (-2)\vec{c} = \vec{b} + 2\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Далее, в силу равенств $(\vec{c},\vec{b})=-1$, $(\vec{c},\vec{a})=(\vec{a},\vec{c})=1$, справедливо

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\left\{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right\}=-\left\{\vec{a}(\vec{c},\vec{b})-\vec{b}(\vec{c},\vec{a})\right\}=$$
$$=\vec{b}(\vec{c},\vec{a})-\vec{a}(\vec{c},\vec{b})=1\vec{b}-(-1)\vec{a}=\vec{b}+\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(1,2,3)$, $B(3,-2,1)$.
2. Нормировать вектор $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.
3. Ортогональны ли векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$?
4. Для векторов $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=6\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ вычислить:
  a) $(\vec{a},\vec{b})$;
  b) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$;
  c) $\cos\,(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})$;
  d) $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$;
  e) $K_{\vec{a}}\vec{b}$.
5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и вычислить площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы.
6. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, и вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
7. Для векторов $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ вычислить произведения: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Прямая на плоскости

1. Дано общее уравнение прямой $12x-5y+65=0$. Написать:
  a) уравнение с угловым коэффициентом;
  b) уравнение в отрезках;
  c) нормальное уравнение.
Найти расстояние от начала координат до прямой и координаты точек пересечения прямой с осями координат.

Решение. Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y=kx+b$. Выражая в общем уравнении прямой $12x-5y+65=0$ переменную y через переменную x, получим уравнение с угловым коэффициентом $y = \frac{12}{5}x + 13$. Далее, уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (при этом точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ — это точки пересечения прямой с осями координат). Перенося в общем уравнении прямой свободный член 65 направо и поделив на -65 получим уравнение в отрезках $\frac{x}{-\frac{65}{12}} + \frac{y}{13} = 1$. Наконец, нормальное уравнение прямой имеет вид $\alpha x + \beta y - \varrho = 0$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $\varrho \geqslant 0$. При этом ϱ — расстояние от прямой до начала координат. Поделив общее уравнение прямой на $-\sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = -13$, получим нормальное уравнение прямой $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 5 = 0$. Из нормального уравнения прямой получаем, что расстояние от начала координат до прямой равно 5. Из уравнения прямой в отрезках получаем, что точки пересечения прямой с осями координат — это точки $A(-\frac{65}{12}, 0)$ и $B(0, 13)$.

2. Найти расстояние от точки $D(-2, 4)$ до прямой $-12x+5y-11 = 0$.

Решение. Расстояние от точки $D(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ может быть вычислено по формуле $dist(D, l) = \left|\frac{Ax_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. Таким образом, искомое расстояние есть

$$d = \left|\frac{-12 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 - 11}{\sqrt{(12)^2 + 5^2}}\right| = \frac{33}{13}.$$

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1, 3)$ и $N(2, 5)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Таким образом, искомое уравнение есть

$$\frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - 3}{5 - 3},$$

или, окончательно,

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 3}{2}.$$

4. Проверить являются ли прямые $3x+4y+2 = 0$ и $-4x-3y+2 = 0$

a) параллельными?

b) перпендикулярными?

Почему?

Решение. Прямые, заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполнено условие $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Необходимое и достаточное условие параллельности прямых следующее:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

В данном случае ни одно условие не выполнено: $3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) \neq 0$, $\frac{3}{-4} \neq \frac{4}{-3}$. Таким образом, прямые не перпендикулярны и не параллельны друг другу.

5. Найти точку пересечения прямых $2x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ и угол между ними.

Решение. Косинус угла между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ дается равенством

$$\cos\varphi = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\,\sqrt{1^2 + 2^2}} \right| = 0.$$

Таким образом, прямые перпендикулярны, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Точку пересечения прямых можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем точку пересечения $M_0(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.

6. Прямая l_0 задана уравнением $3x + 4y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M(-2, 4)$ параллельно прямой l_0. Составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M(-2, 4)$ перпендикулярно прямой l_0.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $\vec{N} = (A, B)$ — вектор нормали к прямой. Заметим, теперь, что в качестве вектора $\vec{N}_1$ нормального к прямой l_1 можно выбрать вектор нормали к прямой l_0: $\vec{N}_1 = \vec{N}_0 = (3, 4)$. В качестве вектора нормали $\vec{N}_2$ к прямой l_2 можно выбрать любой ненулевой вектор перпендикулярный к вектору $\vec{N}_0 = (3, 4)$; например $\vec{N}_2 = (-4, 3)$. Таким образом, искомые уравнения

$$l_1: \quad 3(x + 2) + 4(y - 4) = 0,$$
$$l_2: \quad -4(x + 2) + 3(y - 4) = 0.$$

Записывая эти уравнения в стандартном виде, получаем

$$l_1: \quad 3x + 4y - 10 = 0,$$
$$l_2: \quad -4x + 3y - 20 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано общее уравнение прямой $3x - 4y + 24 = 0$. Написать:
  a) уравнение с угловым коэффициентом;
  b) уравнение в отрезках;
  c) нормальное уравнение.

Найти расстояние от начала координат до прямой и координаты точек пересечения прямой с осями координат.

2. Найти расстояние от точки $D(-1, 1)$ до прямой $-4x+3y-9 = 0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1, -1)$ и $N(1, 2)$.

4. Проверить являются ли прямые $x + 4y + 2 = 0$ и $-4x + y + 2 = 0$
  a) параллельными?
  b) перпендикулярными?
  Почему?

5. Найти точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$ и $2x + 2y - 3 = 0$ и угол между ними.

6. Прямая l_0 задана уравнением $x+2y+2 = 0$. Составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M(-1, 3)$ параллельно прямой l_0. Составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M(-1, 3)$ перпендикулярно прямой l_0.

Плоскость в пространстве

1. Дано общее уравнение плоскости $x - 2y + 2z - 12 = 0$. Написать уравнение в отрезках и нормальное уравнение. Найти расстояние от начала координат до плоскости и координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

Решение. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; при этом точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ — это точки пересечения плоскости с осями координат. Перенося в общем уравнении свободный член в правую часть и поделив на 12, получаем уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{12} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{6} = 1$. Нормальное уравнение плоскости имеет вид $\alpha x + \beta y + \gamma z - \varrho = 0$, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\varrho \geqslant 0$; при этом ϱ — это расстояние от начала координат до плоскости. Разделив общее уравнение плоскости на

$\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$, получим нормальное уравнение $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0$. Согласно уравнению в отрезках, точки пересечения плоскости с осями координат — это $A(12,0,0)$, $B(0,-6,0)$, $C(0,0,6)$. Из нормального уравнения вытекает, что расстояние от начала координат до плоскости равно 4.

2. Написать уравнение плоскости (xy).

Решение. В качестве нормали к плоскости (xy) можно взять вектор $\vec{k}$, координаты которого — $(0,0,1)$. Следовательно, уравнение должно иметь вид $z + D = 0$. С другой стороны плоскость (xy) проходит через начало координат. Следовательно, свободный член в уравнении плоскости должен быть равен нулю. Таким, образом получаем уравнение $z = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M(-2,4,0)$ до плоскости $x-2y+2z-12=0$.

Решение. Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, дается формулой

$$dist(A_0,\alpha) = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1\cdot(-2)+(-2)\cdot 4+2\cdot 0-12}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right| = \frac{22}{3}.$$

4. Написать уравнение плоскости, содержащей точки $A_0(-1,2,0)$, $B_0(-2,1,1)$ и $C_0(1,1,-1)$.

Решение. Поскольку искомая плоскость содержит векторы $\overrightarrow{A_0B_0} = (-1,-1,1)$, $\overrightarrow{A_0C_0} = (2,-1,-1)$, в качестве нормали к плоскости можно взять векторное произведение

$$\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению уравнения плоскости, с нормалью $\overrightarrow{N} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ и проходящей через точку $A_0(-1,2,0)$. Поскольку уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где (A,B,C) — координаты вектора нормали к плоскости, искомое уравнение можно записать в виде $2(x+1)+(y-2)+3(z-0)=0$. Окончательно получаем $2x+y+3z=0$.

5. Проверить являются ли плоскости $3x-4y+z-12=0$ и $x+y+z-169=0$

a) параллельными

b) перпендикулярными?

Почему?

Решение. Плоскости, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности плоскостей является равенство $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. В условиях задачи выполнено второе условие: $3\cdot 1+(-4)\cdot 1+1\cdot 1=0$. Таким образом, плоскости перпендикулярны.

6. Найти угол между плоскостями $3x-4y+z-12=0$ и $x-3y-4z+2=0$.

Решение. Косинус угла между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\left|\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{3\cdot 1+(-4)\cdot(-3)+1\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}\,\sqrt{1^2+(-3)^2+(-4)^2}}\right|=\frac{11}{26}.$$

Соответственно угол между плоскостями есть $\varphi=\arccos\frac{11}{26}$.

7. Через точку $M_0(-2,4,0)$ провести плоскость параллельно плоскости $3x-4y+z-12=0$.

Решение. Поскольку уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где (A,B,C) — координаты вектора нормали к плоскости, искомое уравнение можно записать в виде $3(x+2)-4(y-4)+z=0$, или, окончательно, $3x-4y+z+22=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано общее уравнение плоскости $2x-y+2z+60=0$. Написать уравнение в отрезках и нормальное уравнение. Найти расстояние от начала координат до плоскости и координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

2. Написать уравнение плоскости (yz).
3. Найти расстояние от точки $M(3,2,1)$ до плоскости $2x-y+2z+60=0$.
4. Написать уравнение плоскости, содержащей точки $A_0(1,1,1)$, $B_0(-1,1,1)$ и $C_0(1,1,-1)$.
5. Проверить являются ли плоскости $3x+3y+3z-12=0$ и $x+y+z-169=0$

a) параллельными

b) перпендикулярными?

Почему?

6. Найти угол между плоскостями $x-y+z-12=0$ и $x+y+z+2=0$.
7. Через точку $M_0(1,1,2)$ провести плоскость параллельно плоскости $x-3y+5z-12=0$.

Плоскость и прямая в пространстве

1.Прямая задана как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} 2x-3y+z-6=0, \\ 3x+2y-8=0. \end{cases}$$

Написать канонические и параметрические уравнения прямой.
Решение. Искомая прямая перпендикулярна векторам нормалей к плоскостям $\overrightarrow{N}_1 = 2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{N}_2 = 3\vec{i}+2\vec{j}$. Следовательно, за направляющий вектор прямой можно выбрать любой вектор пропорциональный векторному произведению

$$\overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+3\vec{j}+13\vec{k}.$$

Далее, необходимо найти какую-нибудь точку на искомой прямой, т.е. точку, координаты которой удовлетворяют уравнениям обеих плоскостей. Положим, например, $x=0$, тогда из системы уравнений плоскостей получим $y=4$, $z=18$. Таким образом, точка $M_0(0,4,18)$ принадлежит нашей прямой. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельной направляющему вектору $\overrightarrow{L} = m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0+tm, \\ y = y_0+tn, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0+tp, \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Таким образом, получаем параметрические и канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=-2t, \\ y=4+3t, \qquad t\in\mathbb{R}; \\ z=18+13t, \end{cases}$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-18}{13}.$$

2. Каковы канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1,2,4)$, $B(-2,1,3)$?

Решение. Поскольку канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

искомые канонические уравнения выглядят следующим образом

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{-1}.$$

3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,1,1)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+z-6=0$.

Решение. Искомая прямая проходит через точку $A(1,1,1)$ и сонаправлена вектору нормали к плоскости $\overrightarrow{N}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Таким образом, требуемые канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}.$$

4. Написать канонические уравнения прямой l_2, проходящей через точку $A(1,1,1)$ и параллельной прямой l_1, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$.

Решение. Прямая l_2 проходит через точку $A(1,1,1)$ и параллельна направляющему вектору $\overrightarrow{L}_2=2\vec{i}+\vec{k}$ прямой l_1. Следовательно, канонические уравнения прямой l_2 имеют вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

5. Найти угол между прямыми
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4},\quad \frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{1}.$$
Решение. Косинус угла между прямыми, заданными канонически-ми уравнениями
$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$
определяется равенством
$$\cos\varphi=\left|\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\right|=$$
$$=\left|\frac{1\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}\,\sqrt{3^2+4^2+1^2}}\right|=\frac{19}{26}.$$
Соответственно, угол $\varphi=\arccos\frac{19}{26}$.

6. Найти точку пересечения прямой
$$\begin{cases} x=5-t,\\ y=1-2t,\\ z=3+2t \end{cases}$$
и плоскости $2x+2y-z=5$. Определить угол между прямой и плоскостью.

Решение. Если прямая параллельна вектору $\overrightarrow{L}=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$, а плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{N}=N_x\vec{i}+N_y\vec{j}+N_z\vec{k}$, то синус угла между прямой и плоскостью находится по формуле
$$\sin\varphi=\left|\frac{L_xN_x+L_yN_y+L_zN_z}{\sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2}\,\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}\right|=$$
$$=\left|\frac{(-1)\cdot 2+(-2)\cdot 2+2\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}\,\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\right|=\frac{8}{9}.$$
Таким образом угол $\varphi=\arcsin\frac{8}{9}$.

Далее, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, подставим выражения для координат точки на прямой через параметр в уравнение плоскости: $2(5-t)+2(1-2t)-(3+2t)=5$. Решая получившееся уравнение, находим $t=1/2$, а затем из параметрических уравнений прямой находим координаты точки пересечения прямой и плоскости: $x=\frac{9}{2}$, $y=0$, $z=4$. Таким образом, прямая и плоскость пересекаются в точке $M_0(\frac{9}{2},0,4)$.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(0,1,0)$ перпендикулярно прямой
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$
Решение. Плоскость проходит через точку $A_0(0,1,0)$ и перпендикулярна направляющему вектору прямой $\overrightarrow{L} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Следовательно, искомое уравнение плоскости имеет вид $1(x-0)+2(y-1)+3(z-0)=0$ или, окончательно, $x+2y+3z-2=0$.

8. Найти уравнение плоскости, содержащей прямые
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}.$$
Решение. Прямые, очевидно, пересекаются в точке $M_0(1,2,3)$. Следовательно, искомая плоскость также проходит через точку $M_0(1,2,3)$. Векторы $\overrightarrow{L}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\overrightarrow{L}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ — направляющие векторы заданных прямых. В качестве нормального к плоскости вектора можно выбрать любой вектор пропорциональный векторному произведению $\overrightarrow{L}_1 \times \overrightarrow{L}_2 = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$. Выберем вектор нормали $\overrightarrow{N} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0$, что равносильно $x-2y+z=0$.

9. Найти уравнение плоскости, содержащей точку $A_0(1,1,1)$ и прямую l, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Решение. Прямая l проходит через точку $B_0(1,2,3)$. Таким образом, искомая плоскость заведомо содержит вектор $\overrightarrow{A_0B_0}=(0,1,2)$. В качестве вектора нормали можно взять векторное произведение направляющего вектора прямой l и вектора $\overrightarrow{A_0B_0}$:
$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$
Поскольку искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{N} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и проходит через точку $A_0(1,1,1)$, требуемое уравнение имеет вид $(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0$ или, окончательно, $x-2y+z=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Прямая задана как пересечение двух плоскостей
$$\begin{cases} 2x+y+2z-6=0, \\ 3x+2y-z-8=0. \end{cases}$$
Написать канонические и параметрические уравнения прямой.

2. Каковы канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1,1,0)$, $B(0,-1,2)$?

3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,0,1)$ перпендикулярно плоскости $x-y+z-8=0$.

4. Написать канонические уравнения прямой l_2, проходящей через точку $A(0,1,1)$ и параллельной прямой l_1, заданной каноническими уравнениями $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

5. Найти угол между прямыми
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{3},\quad \frac{x+3}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{2}.$$

6. Найти точку пересечения прямой
$$\begin{cases} x=1-3t, \\ y=2-2t, \\ z=3+1t \end{cases}$$
и плоскости $-x+3y+2z=1$. Определить угол между прямой и плоскостью.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1,-1,1)$ перпендикулярно прямой
$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-7}{1}.$$

8. Найти уравнение плоскости, содержащей прямые
$$\frac{x+3}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1},\quad \frac{x+3}{-3}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-3}.$$

9. Найти уравнение плоскости, содержащей точку $A_0(2,3,4)$ и прямую l, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-5}{1}$.

Часть II

Программа экзамена зимней сессии

4. Кривые второго порядка на плоскости

4.1. Определение и каноническое уравнение эллипса.
4.2. Свойства эллипса. Эксцентриситет эллипса.
4.3. Касательные к эллипсу. Оптическое свойство эллипса (без доказательства).

4.4. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
4.5. Свойства гиперболы. Эксцентриситет гиперболы.
4.6. Асимптоты гиперболы.
4.7. Касательная к гиперболе. Оптическое свойство гиперболы (без доказательства).
4.8. Определение и каноническое уравнение параболы.
4.9. Свойства параболы. Касательные к параболе. Оптическое свойство параболы (без доказательства).
4.10. Полярные координаты на плоскости. Связь полярных и декартовых координат.
4.11. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах.

5. Алгебра матриц

5.1. Определение матриц. Примеры.
5.2. Линейные операции над матрицами, их свойства.
5.3. Транспонирование и сопряжение матриц.
5.4. Умножение матриц. Правило "строка на столбец". Некоммутативность умножения.
5.5. Свойства произведения матриц.
5.6. Класс квадратных матриц. Единичная матрица.
5.7. След квадратной матрицы, его свойства.
5.8. Определение и свойства обратной матрицы.
5.9. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ векторов-столбцов. Стандартный базис в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ и координаты вектора в стандартном базисе.
5.10. Действие матриц на n-мерные векторы-столбцы.
5.11. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений.
5.12. Перестановки, их свойства.
5.13. Определитель квадратной матрицы. Определение, примеры.
5.14. Свойства определителей.
5.15. Вычисление определителя треугольной матрицы. Вычисление определителя методом Гаусса.
5.16. Алгебраические дополнения. Миноры. Разложение определителя по строке (столбцу).
5.17. Теорема об определителе произведения (без доказательства).
5.18. Неособые квадратные матрицы. Построение обратной матрицы.

6. Системы линейных алгебраических уравнений

6.1. Линейные системы с неособой квадратной матрицей коэффициентов. Формулы Крамера.
6.2. Расширенная матрица системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса в случае системы с неособой квадратной матрицей коэффициентов.
6.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.
6.4. Линейная зависимость столбцов и строк.
6.5. Миноры прямоугольной матрицы. Три определения ранга матрицы.
6.6. Теорема о ранге (без доказательства).
6.7. Вычисление ранга матрицы.
6.8. Общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.
6.9. Критерий существования нетривиального решения однородной системы (без доказательства).
6.10. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий разрешимости неоднородной системы при любой правой части. (Без доказательства).
6.11. Альтернатива Фредгольма для систем с квадратной матрицей.
6.11. Описание метода Гаусса в случае общих систем линейных алгебраических уравнений.

Задачи с решениями к экзамену зимней сессии

Кривые второго порядка

1. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что её эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$.

Решение. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ расположены в точках $F_1(-c_1, 0)$, $F_2(c_1, 0)$, где $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$. Следовательно, эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ имеет фокусы в точках $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$. Эксцентриситет ε и абсцисса c правого фокуса F_2 гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ связаны с полуосями гиперболы следующими соотношениями: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $b^2 = c^2 - a^2$, откуда легко вывести

$$a = \frac{c}{\varepsilon}, \quad b = \frac{c}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,.$$

Гипербола имеет эксцентриситет $\varepsilon = 5/4$ и абсциссу правого фокуса $c = c_1 = 5$ (т.к. фокусы эллипса $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ и искомой гиперболы совпадают). Следовательно, ее полуоси даются равенствами

$$a = \frac{5}{5/4} = 4, \quad b = 4\sqrt{\frac{25}{4} - 1} = 3.$$

Таким образом, искомое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2. Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, проходящих через точку $M_0(3, -6)$.

Решение. Коэффициенты уравнения $Ax + By + C = 0$ прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и касающейся в некоторой точке эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, должны удовлетворять двум условиям

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ A^2a^2 + B^2b^2 = C^2. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты искомых уравнений удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 3A - 6B + C = 0, \\ 9A^2 + 4B^2 = C^2. \end{cases}$$

Выразив коэффициент C из первого уравнения, перепишем полученную систему равенств:

$$\begin{cases} C = 6B - 3A, \\ 9A^2 + 4B^2 = 36B^2 - 36AB + 9A^2; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} C = 6B - 3A, \\ 32B^2 - 36AB = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} C = 6B - 3A, \\ 32B(B - \frac{9}{8}A) = 0. \end{cases}$$

Разрешая последнюю систему, получим два решения

$$\left[\begin{array}{l} B = 0, \quad C = -3A, \\ B = \frac{9}{8}A, \quad C = \frac{15}{4}A, \end{array} \right.$$

которые дают нам два уравнения касательных $Ax - 3A = 0$, $Ax + \frac{9}{8}Ay + \frac{15}{4}A = 0$, в которых A можно выбрать произвольным. Положив в первом уравнении $A = 1$, а во втором уравнении $A = 8$, получим: $x = 3$ и $8x + 9y + 30 = 0$.

3. Написать уравнение асимптот гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение. Поскольку асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ задаются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$, искомые уравнения имеют вид $y = \pm\frac{2}{3}x$.

4. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 2x$, касающихся её в точках с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение. Ординаты точек касания есть $y_0 = \pm\sqrt{2x_0} = \pm\sqrt{8}$. Поскольку прямая, касающаяся параболы $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, задается уравнением $yy_0 = p(x + x_0)$, искомые уравнения имеют вид $\sqrt{8}y = (x + 4)$ и $-\sqrt{8}y = (x + 4)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ при условии, что её эксцентриситет $\varepsilon = 2$.
2. Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, проходящих через точку $M_0(5, -4)$.
3. Написать уравнение асимптот гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.
4. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = x$, касающихся её в точках с абсциссой $x_0 = 2$.

Алгебра матриц. Системы линейных алгебраических уравнений

1.Вычислить $\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Решение.

$$\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 6 + 8 = 14.$$

2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1-i & 3 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}^*$, где i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

Решение.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix}1+i & 2\\ 1-i & 3\\ 2 & 1+2i\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overline{1+i} & \overline{1-i} & \overline{2}\\ 2 & 3 & \overline{1+2i}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1-i & 1+i & 2\\ 2 & 3 & 1-2i\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1-i+6 & 1+i+9 & 2+3-6i\\ 2-2i+8 & 2+2i+12 & 4+4-8i\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}7-i & 10+i & 5-6i\\ 10-2i & 14+2i & 8-8i\end{pmatrix}$$

3. С каким знаком входит в определитель шестого порядка произведение $a_{42}a_{31}a_{15}a_{66}a_{23}a_{54}$?

Решение. Переставим сомножители так, чтобы первые индексы оказались упорядоченными по возрастанию: $a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}a_{66}$. Теперь знак перед произведением — это знак перестановки вторых индексов: $\{5,3,1,2,4,6\}$. Перестановка вторых индексов содержит следующие беспорядки: $(5,3)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,4)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Таким образом, в перестановке вторых индексов шесть беспорядков, и произведение входит в определитель со знаком плюс.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 1 & 9 & 37\\ 1 & 2 & 2 & 15\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

Решение. Вычитая из четвертой строки третью (IV-III), затем из третьей строки вторую (III-II), и наконец из второй строки первую (II-I), получим:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 9 & 37\\ 1 & 2 & 2 & 15\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix} \overset{\text{IV-III}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 9 & 37\\ 1 & 2 & 2 & 15\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{\text{III-II}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 1 & 9 & 37\\ 1 & 2 & 2 & 15\\ 0 & 0 & 1 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{\text{II-I}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 9 & 37\\ 0 & 1 & -7 & -22\\ 0 & 0 & 1 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

5. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Последовательно вычитая первую строку из второй, третьей и четвертой строк, получим:

$$rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{II-I}}{=} rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{III-I}}{=}$$

$$= rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{IV-I}}{=} rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{III+II}}{=}$$

$$= rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ранг итоговой матрицы равен двум, т.к. в ней есть ненулевой минор 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

6. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Воспользуемся методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II-I} \\ \text{III-I}}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{(-1)II} \\ \text{(-1)III}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{II-III}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему методом Крамера: $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$.

Решение. Вычислим необходимые определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Таким образом, решение системы $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -5$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 11$.

8. Решить систему методом Гуасса $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{II-I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Делая замену переменных $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_4$, $y_5 = x_5$, получим систему уравнений для переменных $y_1 \dots y_5$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I-II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выпишем общее решение системы для переменных $y_1, \dots, y_5$:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - y_3 - y_4 - y_5, \\ y_2 = 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - C_1 - C_2 - C_3, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = C_1, \\ y_4 = C_2, \\ y_5 = C_3, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные величины. Переписывая общее решение в переменных $x_1, \dots, x_5$, окончательно получим:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - C_1 - C_2 - C_3 \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = C_2, \\ x_5 = C_3. \end{cases}$$

Этот ответ можно записать в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

2. Вычислить $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 3+2i & 2+2i \\ i-2 & 1+3i \end{pmatrix}^*$, где i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

3. С каким знаком входит в определитель седьмого порядка произведение $a_{33}a_{52}a_{76}a_{25}a_{41}a_{64}a_{17}$?

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

7. Решить систему методом Крамера: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

8. Решить систему методом Гуасса $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Список литературы

[1] А.Г.Аленицын. Методическое указание к практическим занятиям по курсу "Высшая математика". Алгебра, I курс. Часть I. Л., 1984.

[2] А.Г.Аленицын. Учебные задания к практическим занятиям по курсу "Высшая математика"для групп ЦИПС. Алгебра I курс. Часть II. Л., 1988.