САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ
"ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект «Инновационная образовательная среда в классическом университете»

Пилотный проект № 22 «Разработка и внедрение
инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет
кафедра высшей математики и математической физики

В.А.Слоущ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ
ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ И ЭКЗАМЕНОВ
БАЗОВЫЙ ПОТОК. II СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007г.

- Рецензент: проф., д.ф.м.н. Бирман М.Ш.
- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ И ЭКЗАМЕНОВ. БАЗОВЫЙ ПОТОК. II СЕМЕСТР. — СПб., 2007

Настоящее учебнометодическое пособие является прямым продолжением пособия [3]. Здесь собраны простейшие задания, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на коллоквиуме и экзамене второго семестра по курсу "Высшая алгебра". Пособие предназначено для студентов первого курса.

Пособие разбито на две части, соответствующие программам весеннего коллоквиума и экзамена летней сессии. В начале каждой части помещена программа соответсвующего ей коллоквиума или экзамена. В каждой части задания объединены по темам. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения. В данное пособие включены только простейшие задачи по курсу "Высшая алгебра"; умение решать такие задачи обязательно для получения удовлетворительной оценки на коллоквиуме и экзамене. Настоящее пособие не содержит краткого изложения основных понятий и фомул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [1], [2]). Частично, впрочем, такая информация приведена в решениях задач. В решениях задач некоторые элементарные выкладки опущены (если подобные рассуждения ранее встречались в других решениях).

В задачах на собственные значения и собственные векторы матрицы рассматриваются как операторы умножения слева в пространстве столбцов над полем $\mathbb{C}$.

Список литературы

[1] А.Г.Аленицын. Методическое указание к практическим занятиям по курсу "Высшая математика". Алгебра, I курс. Часть I. Л., 1984.

[2] А.Г.Аленицын. Учебные задания к практическим занятиям по курсу "Высшая математика"для групп ЦИПС. Алгебра I курс. Часть II. Л., 1988.

[3] В.А.Слоущ. Высшая алгебра. Задачи с решениями для коллоквиумов и экзаменов. Базовый поток. I семестр. СПб., 2007.

Часть I

Программа весеннего коллоквиума

1. Системы линейных алгебраических уравнений (повторение)

1.1. Общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.
1.2. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений. Критерий существования нетривиального решения однородной системы.
1.3. Структура общего решения однородной системы. Фундаментальная система решений однородной системы.
1.4. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий существования решения неоднородной системы при любой правой части.
1.5. Структура общего решения неоднородной системы.
1.6. Альтернатива Фредгольма для систем с квадратной матрицей.

2. Конечномерные линейные пространства

2.1. Определение линейного пространства. Примеры.
2.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов.
2.3. Конечномерные пространства. Базисы. Координаты вектора.
2.4. Размерность конечномерного пространства.
2.5. Изоморфизм конечномерных пространств.
2.6. Подпространство: определение, примеры.
2.7. Линейная оболочка системы векторов.
2.8. Пересечение и линейная сумма подпространств.
2.9. Размерность подпространства. Теорема о размерности линейной суммы подпространств.
2.10. Прямая сумма подпространств.
2.11. Прямое дополнение подпространства.
2.12. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений.

Задачи к весеннему коллоквиуму

Системы линейных алгебраических уравнений. Конечномерные линейные пространства

1. Решить систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right);$$

указать фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы уравнений.

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\longleftrightarrow\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\frac{1}{3}\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{3}x_3 - x_4, \\ x_2 = 2 - \frac{4}{3}x_3 - x_4, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{3}C_1 - C_2, \\ x_2 = 2 - \frac{4}{3}C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные величины. Этот же ответ можно записать в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор $\vec{f} = (1,2,0,0)^t$ — частное решение неоднородной системы; векторы $\vec{e} = C_1(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0)^t + C_2(-1,-1,0,1)^t$ — общее решение соответствующей однородной системы.

2. Проверить, что векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, $\vec{f_4}$ можно выбрать за базис в $\mathbb{R}^4$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (0,1,-1,0)^t$ в этом базисе.

$$\vec{f_1} = (1,2,1,1)^t, \quad \vec{f_2} = (0,0,0,1)^t,$$
$$\vec{f_3} = (1,1,1,1)^t, \quad \vec{f_4} = (0,0,1,1)^t.$$

Решение. Чтобы проверить линейную независимость векторов $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}$ составим из них матрицу и вычислим ее ранг:

$$rank\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \overset{\text{II-2$\cdot$ I}}{=} rank\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \overset{\text{III-I}}{=}$$

$$= rank\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \overset{\text{IV-I}}{=} rank\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \overset{\text{(II,III,IV)}\leftrightarrow\text{(IV,II,III)}}{=}$$

$$= rank\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = 4$$

Поскольку ранг матрицы равен четырем, все ее столбцы (а это векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, $\vec{f_4}$) линейно независимы.

Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}$ значит найти числа α_1, α_2, α_3, α_4 такие, что справедливо равенство

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{f_1} + \alpha_2\vec{f_2} + \alpha_3\vec{f_3} + \alpha_4\vec{f_4}.$$

Последнее векторное равенство эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\2&0&1&0&1\\1&0&1&1&-1\\1&1&1&1&0\end{array}\right)$$

Решая эту систему методом Гаусса, получим единственное решение $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -1$, иначе говоря $\vec{x} = \vec{f_1} + \vec{f_2} - f_3 - f_4$.

3. Указать линейную зависимость векторов

$$\vec{f_1} = (1,1,0,0)^t, \quad \vec{f_2} = (1,0,1,2)^t,$$
$$\vec{f_3} = (1,0,0,1)^t, \quad \vec{f_4} = (1,1,1,1)^t.$$

Решение. Линейная зависимость (независимость) векторов $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$ может быть установлена следующим способом:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \vec{f}_1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \vec{f}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vec{f}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vec{f}_4 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \vec{f}_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & \vec{f}_2 - \vec{f}_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vec{f}_3 - \vec{f}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vec{f}_4 - \vec{f}_1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \vec{f}_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & \vec{f}_2 - \vec{f}_1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vec{f}_3 - \vec{f}_1 - (\vec{f}_2 - \vec{f}_1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vec{f}_4 - \vec{f}_1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \vec{f}_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & \vec{f}_2 - \vec{f}_1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vec{f}_3 - \vec{f}_1 - (\vec{f}_2 - \vec{f}_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{f}_4 - \vec{f}_1 - [\vec{f}_3 - \vec{f}_1 - (\vec{f}_2 - \vec{f}_1)] \end{array}\right).$$

Таким образом, справедливо равенство $\vec{f}_4 - \vec{f}_1 - [\vec{f}_3 - \vec{f}_1 - (\vec{f}_2 - \vec{f}_1)] = \vec{0}$, или, окончательно, $-\vec{f}_1 - \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \vec{0}$, что и является искомой линейной зависимостью.

4. Вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ в базисе $\vec{f}_1 = (1,0,0,0)^t$, $f_2 = (0,1,0,0)^t$, $\vec{f}_3 = (0,0,1,0)^t$, $\vec{f}_4 = (0,0,0,1)^t$ и координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ в базисе $\vec{g}_1 = (1,0,0,0)^t$, $\vec{g}_2 = (1,1,0,0)^t$, $\vec{g}_3 = (1,1,1,0)^t$, $\vec{g}_4 = (1,1,1,1)^t$. Выразить координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ через координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

Решение. Столбцы координат $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^t$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^t$ удовлетворяют равенствам $\vec{x} = F\vec{a}$, $\vec{x} = G\vec{b}$, где матрица F составлена из столбцов $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$, а матрица G — из столбцов $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$, $\vec{g}_4$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, столбцы $\vec{a}$, $\vec{b}$ связаны равенством $\vec{b} = G^{-1}F\vec{a}$. Вычисляя матрицу G^{-1} методом Гаусса, получим

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим теперь, что матрица F — единичная, а потому $G^{-1}F = G^{-1}$. Таким образом, искомое выражение для столбца $\vec{b}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2,\\ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3,\\ \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_4,\\ \beta_4 = \alpha_4.\end{cases}$$

5. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,2,1,0)^t$, $\vec{f_2} = (0,-1,1,1)^t$, $\vec{f_3} = (-3,1,1,0)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,1,2,1)^t$, $\vec{g}_2 = (1,3,0,-1)^t$, $\vec{g}_3 = (0,0,0,1)^t$. Найти размерность и базис подпространств $L\bigcap M$, $L+M$.

Решение. Пространство $L + M$ натянуто на векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$. Найдем базис в $L+M$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & \vec{f_1}\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \vec{f_2}\\ -3 & 1 & 1 & 0 & \vec{f_3}\\ 1 & 1 & 2 & 1 & \vec{g}_1\\ 1 & 3 & 0 & -1 & \vec{g}_2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vec{g}_3\end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & \vec{f_1}\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \vec{f_2}\\ 0 & 7 & 4 & 0 & \vec{f_3}+3\vec{f_1}\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \vec{g}_1-\vec{f_1}\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vec{g}_2-\vec{f_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vec{g}_3\end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & \vec{f_1}\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \vec{f_2}\\ 0 & 0 & 11 & 7 & \vec{f_3}+3\vec{f_1}+7\vec{f_2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vec{g}_3\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \vec{g}_1-\vec{f_1}\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vec{g}_2-\vec{f_1}\end{array}\right).$$

Векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}+3\vec{f_1}+7\vec{f_2}, \vec{g}_3$ линейно независимы; следовательно, векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{g}_3$ тоже линейно независимы и образуют базис в $L+M = \mathbb{R}^4$. Так же можно показать, что наборы векторов $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ и $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно независимы и образуют базисы в L и M, соответственно (а потому $dimL = dimM = 3$). Сразу отметим, что размерность подпространства $L\bigcap M$ может быть вычислена по формуле $dimL\bigcap M = dimL + dimM - dim(L+M) = 2$. Пусть теперь вектор $\vec{x}$ принадлежит подпространству $L\bigcap M$. Вектор $\vec{x}$ можно разложить по базису $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ в пространстве L и по базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ в пространстве M. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Тогда справедливы равенства

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{f_1} + \alpha_2\vec{f_2} + \alpha_3\vec{f_3} = \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \beta_3\vec{g}_3.$$

Следовательно, столбец $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\beta_1, -\beta_2, -\beta_3)^t$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений $A\vec{a} = \vec{0}$, где матрица A составлена из столбцов $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$, $\vec{g_3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая систему $A\vec{a} = \vec{0}$ методом Гаусса, получим общее решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -C_1 - C_2 \\ \alpha_2 = C_2 - C_1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = -C_1 \\ \beta_2 = -C_2 \\ \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом для любого вектора $\vec{x} \in L \bigcap M$ справедливо равенство $\vec{x} = (-C_1 - C_2)\vec{f_1} + (C_2 - C_1)\vec{f_2} = C_1(-\vec{f_1} - \vec{f_2}) + C_2(-\vec{f_1} + \vec{f_2})$. Следовательно, векторы $\vec{h}_1 := -\vec{f_1} - \vec{f_2}$, $\vec{h}_2 := -\vec{f_1} + \vec{f_2}$ образуют базис в $L \bigcap M$. Отметим, что проверять линейную независимость векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ не надо, т.к. их линейная зависимость противоречила бы равенству $dim L \cap M = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1.Решить систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Указать фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы уравнений.

2. Проверить, что векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, $\vec{f_4}$ можно выбрать за базис в $\mathbb{R}^4$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (1, 2, 1, 1)^t$ в этом базисе.

$$\vec{f_1} = (1, 1, 1, 1)^t, \quad \vec{f_2} = (1, 1, -1, -1)^t,$$
$$\vec{f_3} = (1, -1, 1, -1)^t, \quad \vec{f_4} = (1, -1, -1, 1)^t.$$

3. Указать линейную зависимость векторов

$$\vec{f_1} = (0, 0, 1, 1)^t, \quad \vec{f_2} = (1, 2, 1, 0)^t,$$
$$\vec{f_3} = (0, 1, 1, 0)^t, \quad \vec{f_4} = (1, 1, 1, 1)^t.$$

4. Вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ в базисе $\vec{f_1} = (1,0,0,0)^t$, $f_2 = (0,1,0,0)^t$, $\vec{f_3} = (0,0,1,0)^t$, $\vec{f_4} = (0,0,0,1)^t$ и координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ в базисе $\vec{g}_1 = (0,0,0,1)^t$, $\vec{g}_2 = (0,0,1,1)^t$, $\vec{g}_3 = (0,1,1,1)^t$, $\vec{g}_4 = (1,1,1,1)^t$. Выразить координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ через координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

5. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1,1)^t$, $\vec{f_3} = (-1,1,-1,1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (0,1,1,1)^t$, $\vec{g}_2 = (0,0,1,1)^t$, $\vec{g}_3 = (0,0,0,1)^t$. Найти размерность и базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.

Часть II

Вопросы для экзамена летней сессии

3. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

3.1. Понятие линейного оператора. Примеры.

3.2. Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов.

3.3. Изображающая матрица линейного оператора в паре базисов. Изоморфизм пространства линейных операторов и пространства матриц.

3.4. Образ и ранг линейного оператора. Ядро линейного оператора.

3.5. Характеристический многочлен квадратной матрицы.

3.6. Собственные числа квадратной матрицы.

3.7. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$.

3.8. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

3.9. Критерий существования собственного базиса у оператора, действующего из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^n$.

3.10. Подобие матриц. Инварианты подобия.

3.11. Диагональные матрицы. Диагонализуемые матрицы. Диагонализация матриц в классе вещественных матриц и в классе комплексных матриц.

3.12. Оператор замены базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому.

3.13. Преобразование координат вектора и изображающей матрицы линейного оператора при замене базиса. Определитель и след линейного оператора.

4. Конечномерные евклидовы пространства

4.1. Определение вещественного евклидова пространства. Примеры.
4.2. Норма вектора в вещественном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
4.3. Ортогональность векторов в вещественном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.
4.4. Определение комплексного евклидова пространства. Примеры.
4.5. Норма вектора в комплексном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
4.6. Ортогональность векторов в комплексном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.
4.7. Изоморфизм евклидовых пространств.
4.8. Ортогональная сумма подпространств в евклидовом пространстве.
4.9. Ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональные проекторы.
4.10 Транспонирование линейного оператора в вещественном евклидовом пространстве.
4.11. Теорема об образе оператора и ядре транспонированного оператора в вещественном евклидовом пространстве.
4.12. Симметричные и изометрические операторы в вещественном евклидовом пространстве.
4.13. Ортогональные матрицы.
4.14. Симметричные операторы в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Теорема о собственном базисе. Диагонализация вещественной симметричной матрицы.
4.15. Сопряжение линейного оператора в комплексном евклидовом пространстве.
4.16. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора в комплексном евклидовом пространстве.
4.17. Самосопряженные и унитарные операторы в комплексном евклидовом пространстве.
4.18 Унитарные матрицы.
4.19. Самосопряженные и унитарные операторы в пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением. Теорема о собственном базисе. Диагонализация самосопряженной и

унитарной матриц. Случай вещественной ортогональной матрицы.

5. Квадратичные формы

5.1. Понятие квадратичной формы.
5.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием.
5.3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа.
5.4. Закон инерции квадратичных форм.
5.5. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя переменными.
5.6. Поверхности второго порядка.
5.7. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с тремя переменными.

Задачи для экзамена летней сессии

Евклидовы пространства

1. Даны $\vec{x} = (-1, 0, 2, -2)$, $\vec{y} = (1, 1, -1, 1)$. Найти
a) $(\vec{x}, \vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|y\|$;
b) косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

Решение. В соответствии со стандартными формулами: $(\vec{x}, \vec{y}) = (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = -5$; $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = 3$; $\|\vec{y}\| = \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} = 2$. Косинус угла между векторами вычисляется по формуле $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\|y\|} = -5/6$.

2. Вычислить $(\vec{x}, \vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|y\|$ для $\vec{x} = (-1+2i, 3-i, -i)$, $\vec{y} = (-1+i, 2, 2-3i)$, где i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

Решение. Согласно формуле для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^3$, получаем:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (-1+2i)\cdot\overline{(-1+i)} + (3-i)\cdot\overline{2} + (-i)\cdot\overline{(2-3i)} =$$
$$= (-1+2i)\cdot(-1-i) + (3-i)\cdot 2 + (-i)\cdot(2+3i) = 12 - 5i;$$

Аналогично получаем $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = 4$; $\|\vec{y}\| = \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} = \sqrt{19}$.

3. Процессом ортогонализации построить ортонормированный базис подпространства в $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\vec{f}_1 = (0, 1, 0, -1)^t$, $\vec{f}_2 = (1, 1, -1, 1)^t$, $\vec{f}_3 = (-1, -1, 1, 0)^t$.

Решение. Ортонормированный базис строится по следующему алгоритму:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t;$$

$$\tilde{\vec{e}}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \vec{f}_2 - 0\vec{e}_1 = (1, 1, -1, 1)^t,$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\tilde{\vec{e}}_2}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|} = (1/2, 1/2, -1/2, 1/2);$$

$$\tilde{\vec{e}}_3 = \vec{f}_3 - (\vec{f}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{f}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \vec{f}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 = \\ = (-1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^t,$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\tilde{\vec{e}}_3}{\|\tilde{\vec{e}}_3\|} = (-1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^t.$$

4. Построить ортонормированную фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III-II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II-I}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Делая замену переменных $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_4$, $y_4 = x_2$, $y_5 = x_5$, получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II+III} \\ \text{I+III}}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}+\frac{1}{2}\text{II}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выпишем общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = -C_1 - C_2, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = C_1, \\ y_5 = C_2; \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -C_1 - C_2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = C_2; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\vec{f_1} = (-1, 1, 0, 0, 0)^t$, $\vec{f_2} = (-1, 0, 0, 0, 1)^t$ образуют базис в пространстве решений. Построим искомую фундаментальную систему решений ортогонализацией базиса $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)^t;$$

$$\tilde{\vec{e}}_2 = \vec{f_2} - (\vec{f_2}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)^t,$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\tilde{\vec{e}}_2}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t.$$

Искомая ортонормированная фундаментальная система решений есть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Отметим, что полученное решение не единственно. Другие ортонормированные фундаментальные сиситемы решений могут быть получены из найденной произвольным поворотом "внутри пространства решений".

5. Разложить вектор $\vec{x} = (5, 2, -2, 2)^t$ в ортогональную сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \perp F$, где F — линейная оболочка векторов $\vec{f_1} = (2, 1, 1, -1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, 3, 0)^t$.

Решение. Прежде всего заметим, что векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ линейно независимы. Далее, положим $\vec{f} = \alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2}$. Условие ортогональности вектора $\vec{g} = x - \alpha_1 \vec{f_1} - \alpha_2 \vec{f_2}$ подпространству F эквивалентно равенствам

$$\begin{cases} (\vec{x}-\alpha_1\vec{f_1}-\alpha_2\vec{f_2},\vec{f_1})=0, \\ (\vec{x}-\alpha_1\vec{f_1}-\alpha_2\vec{f_2},\vec{f_2})=0; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1(\vec{f_1},\vec{f_1})+\alpha_2(\vec{f_2},\vec{f_1})=(\vec{x},\vec{f_1}), \\ \alpha_1(\vec{f_1},\vec{f_2})+\alpha_2(\vec{f_2},\vec{f_2})=(\vec{x},\vec{f_2}); \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7\alpha_1+6\alpha_2=8, \\ 6\alpha_1+11\alpha_2=1; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=2, \\ \alpha_2=-1. \end{cases}$$

Таким образом, $\vec{f}=2\vec{f_1}-\vec{f_2}=(3,1,-1,-2)^t$, $\vec{g}=\vec{x}-\vec{f}=(2,1,-1,4)^t$; справедливо ортогональное разложение $\vec{x}=(3,1,-1,-2)^t+(2,1,-1,4)^t$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны $\vec{x}=(0,2,1,2)$, $\vec{y}=(-1,1,1,-1)$. Найти

a) $(\vec{x},\vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|y\|$;

b) косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

2. Вычислить $(\vec{x},\vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|y\|$ для $\vec{x}=(2-i,i,3+i)$, $\vec{y}=(2,3-i,1+i)$, где i — мнимая единица, т.е. $i^2=-1$.

3. Процессом ортогонализации построить ортонормированный базис подпространства в $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\vec{f_1}=(1,1,1,-1)^t$, $\vec{f_2}=(1,-1,-1,1)^t$, $\vec{f_3}=(-1,-1,1,0)^t$.

4. Построить ортонормированную фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

5. Разложить вектор $\vec{x}=(1,2,-1,2)^t$ в ортогональную сумму $\vec{x}=\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}\in F$, $\vec{g}\perp F$, где F — линейная оболочка векторов $\vec{f_1}=(1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2}=(1,1,1,0)^t$.

Собственные числа и собственные векторы

1.Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выпишем характеристический многочлен матрицы A:

$$d_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1).$$

Собственными числами матрицы A называются корни характеристического многочлена $d_A(\lambda)$; в данном случае собственные числа матрицы A: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Собственными векторами матрицы A, отвечающими собственному числу λ называются ненулевые решения однородного уравнения $(A-\lambda I)\vec{f}=\vec{0}$.

Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению $\lambda_1=0$:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{f_1}=\vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2C, \\ x_2 = C, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{f_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так же найдем собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_2=-1$:

$$(A-\lambda_2 I)\vec{f_2}=\vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = C, \\ x_2 = C, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{f_2}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Подобным преобразованием привести матрицу A к диагональному виду

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Требуется найти обратимую матрицу X такую, чтобы матрица $X^{-1}AX$ была диагональна, и выписать матрицу $X^{-1}AX$. Матрицу X можно составить из линейно независимых собственных векторов матрицы A: $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ ($A\vec{f_1}=\lambda_1\vec{f_1}$, $A\vec{f_2}=\lambda_2\vec{f_2}$, $A\vec{f_3}=\lambda_3\vec{f_3}$). При этом матрица $X^{-1}AX$ будет иметь вид $diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Следовательно, собственные числа матрицы A: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$. Решая задачу $(A-1\cdot I)\vec{f}=\vec{0}$ на собственный вектор, отвечающий собственным числам $\lambda_1=\lambda_2=1$ методом Гаусса, получаем общее решение $(x_1,x_2,x_3)^t=C_1(-2,1,0)^t+C_2(0,0,1)^t$. Таким образом, собственным значениям $\lambda_1=\lambda_2=1$ отвечают линейно независимые собственные векторы $\vec{f_1}=(-2,1,0)^t$, $\vec{f_2}=(0,0,1)^t$. Аналогично, собственному значению $\lambda_3=-2$ отвечает собственный вектор $\vec{f_3}=(-1,1,1)^t$. Составляя матрицу X из вектор-столбцов $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, получим

$$X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A\vec{f_1} = \vec{f_1}$, $A\vec{f_2} = \vec{f_2}$, $A\vec{f_3} = -2\vec{f_3}$, матрица $X^{-1}AX$ имеет вид

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что последнее равенство ясно и без вычислений — из общей теории.

3. Определить можно ли подобным преобразованием привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду.

Решение. Для того, чтобы матрица A была подобна диагональной необходимо и достаточно чтобы из собственных векторов матрицы A можно было составить базис в $\mathbb{C}^3$. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

Следовательно, собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$$(A - 0 \cdot I)\vec{f} = \vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = C \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство собственных векторов, матрицы A отвечающих собственным числам $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, одномерно, а потому нельзя выбрать три линейно независимых собственных вектора. Следовательно, матрица A не диагонализуется.

4. Привести симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду.
Решение. Требуется найти ортогональную матрицу T такую, чтобы матрица $T^{-1}AT$ была диагональна, и выписать матрицу $T^{-1}AT$. Матрицу T можно составить из нормированных и ортогональных друг другу собственных векторов матрицы A: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ($A\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2$, $A\vec{e}_3 = \lambda_3\vec{e}_3$). При этом на диагонале матрицы $T^{-1}AT$ будут стоять соответствующие собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным числам $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$(A-2I)\vec{f} = \vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -C_1 - C_2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\vec{f}_1 = (-1,1,0)^t$, $\vec{f}_2 = (-1,0,1)^t$ образуют базис в собственном подпространстве F матрицы A, отвечающем собственному числу 2. Построим ортонормированный базис в F ортогонализацией базиса $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t;$$

$$\tilde{\vec{e}}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^t,$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\tilde{\vec{e}}_2}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t.$$

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — ортогональные друг другу и нормированные собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным числам $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Найдем собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_3 = -1$:

$$(A-(-1)I)\vec{f}=\vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{II-I} \\ \mathrm{III-2I}}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I-II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = C, \\ x_3 = C; \end{cases} \Longleftrightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормировав вектор $\vec{f}$, получаем $\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$, отвечающий собственному числу $\lambda_3 = -1$.

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют ортонормированный собственный базис матрицы A. Составляя искомую матрицу T из столбцов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, получим:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$, $A\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$, для матрицы $T^{-1}AT$ получаем выражение

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду самосопряженную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \ i \text{ — мнимая единицу, т.е. } i^2 = -1.$$

Решение. Требуется найти унитарную матрицу U такую, чтобы матрица $U^{-1}AU$ была диагональна, и выписать матрицу $U^{-1}AU$. Матрицу U можно составить из нормированных и ортогональных друг другу собственных векторов матрицы A: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ($A\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2$). При этом матрица $U^{-1}AU$ будет иметь вид

$diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Отметим, что хотя собственные значения самосопряженной матрицы A вещественны, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и матрица U — вообще говоря комплексные.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2.)$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Найдем собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)\vec{f} = \vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II}+i\text{I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -iC, \\ x_2 = C \end{cases} \Longleftrightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нормированный вектор $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)^t$ отвечает собственному числу $\lambda_1 = 0$.

Найдем собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)\vec{f} = \vec{0} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II-}i\text{I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = iC, \\ x_2 = C \end{cases} \Longleftrightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нормированный вектор $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)^t$ отвечает собственному числу $\lambda_2 = 2$.

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют собственный ортонормированный базис матрицы A в пространстве $\mathbb{C}^2$. Составляя искомую матрицу U из столбцов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, получим

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В силу равенств $A\vec{e}_1 = 0\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$, матрица $U^{-1}AU$ имеет вид

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду ортогональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Решение. Требуется найти унитарную матрицу U такую, чтобы матрица $U^{-1}AU$ была диагональна, и выписать матрицу $U^{-1}AU$. Матрицу U можно составить из векторов-столбцов собственного ортонормированного базиса матрицы A в пространстве $\mathbb{C}^2$. При этом на диагонали матрицы $U^{-1}AU$ будут стоять соответствующие собственные числа матрицы A.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1.$$

Собственные значения матрицы A (корни характеристического многочлена $d_A(\lambda)$): $\lambda_1 = \frac{1}{sqrt2}(1+i)$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (где i — мнимая единица). Решая задачу на собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1, λ_2, получаем нормированные собственные векторы $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^t$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^t$. Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ автоматически ортогональны друг другу и образуют собственный ортонормированный базис матрицы A в пространстве $\mathbb{C}^2$. Составляя матрицу U из столбцов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, получим

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что хотя матрица A вещественна, ее собственные числа и собственные векторы — комплексные. Невозможна диагонализация матрицы A в классе вещественных матриц, т.е. так чтобы U (а с ней и $U^{-1}AU$) была вещественной.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Подобным преобразованием привести матрицу A к диагональному виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Определить можно ли подобным преобразованием привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду.

4. Привести симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду.
5. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду самосопряженную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \;\; i \text{ — мнимая единицу, т.е. } i^2 = -1.$$

6. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду ортогональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Квадратичные формы. Кривые и поверхности второго порядка

1.Выразить квадратичную форму

$$\Phi(x,y) = (A\vec{f},\vec{f}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = (x,y)^t,$$

через координаты вектора $\vec{f}$.
Решение.

$$A\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix},$$

$$(A\vec{f},\vec{f}) = (x+2y)x + (2x+y)y = x^2 + 4xy + y^2.$$

2. Найти симметричную 3×3-матрицу A, отвечающую квадратичной форме $\Phi(x,y,z) = x^2 - 3xy + yz$:

$$\Phi(x,y,z) = x^2 - 3xy + yz = (A\vec{f},\vec{f}), \quad \vec{f} = (x,y,z)^t.$$

Решение. Для симметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix},$$

и вектора $\vec{f} = (x,y,z)^t$ справедливо равенство

$$(A\vec{f},\vec{f}) = ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz.$$

Сравнивая последнее выражение с исходной квадратичной формой $\Phi(x,y,z) = x^2 - 3xy + yz$, получим: $a = 1, b = -\frac{3}{2}, c = 0, d = 0, e =$

$\frac{1}{2}$, $f = 0$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Привести квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4xz + 5z^2$$

к сумме квадратов методом Лагранжа (выделением полных квадратов). Определить какого типа поверхность задает уравнение $\Phi(x, y, z) = 1$.

Решение. Выделим полный квадрат из слагаемых содержащих переменную x:

$$\Phi = (x + y + 2z)^2 + y^2 + z^2 - 4yz.$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = x + y + 2z, \\ y_1 = y, \\ z_1 = z, \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 - y_1 - 2z_1, \\ y = y_1, \\ z = z_1, \end{cases}$$

и получим $\Phi = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 4y_1z_1$. Выделив в последнем выражении полный квадрат, прийдем к равенству

$$\Phi = x_1^2 + (y_1 - 2z_1)^2 - 3z_1^2.$$

Сделав замену переменной

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 - 2z_1, \\ z_2 = z_1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + 2z_2, \\ z_1 = z_2, \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_2 - y_2 - 4z_2, \\ y = y_2 + 2z_2, \\ z = z_2, \end{cases}$$

окончательно получим $\Phi = x_2^2 + y_2^2 - 3z_2^2$. Уравнение $\Phi(x, y, z) = 1 \iff x_2^2 + y_2^2 - 3z_2^2 = 1$ задает однополстной гиперболоид. Отметим, что метод Лагранжа не дает возможности определить полуоси гиперболоида. Разные замены переменных могут привести к уравнению $\alpha_1\tilde{x}^2 + \alpha_2\tilde{y}^2 + \alpha_3\tilde{z}^2 = 1$, и коэффициенты α_1, α_2 и α_3 зависят от используемой замены переменных. При этом, согласно закону инерции квадратичных форм, число положительных, отрицательных и нулевых чисел среди α_1, α_2 и α_3 не зависит от замены переменных, что и позволяет определить тип поверхности.

4. Привести квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

к сумме квадратов при помощи ортогонального преобразования. Определить какого типа поверхность задает уравнение $\Phi(x, y, z) = 1$ и найти метрические характеристики этой поверхности.

Решение. Квадратичная форма $\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$ может быть записана в виде

$$\Phi(x,y,z) = (A\vec{f},\vec{f}), \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = (x,y,z)^t.$$

Приведем матрицу A ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду. Это заведомо возможно, т.к. матрица симметрична. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4).$$

Можно найти нормированные собственные векторы $\vec{f_1} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^t$, $\vec{f_2} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^t$, $\vec{f_3} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^t$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$. Векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ автоматически оказываются ортогональными друг другу и образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$.

Составим теперь ортогональную матрицу T из столбцов $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Делая в квадратичной форме $\Phi(x,y,z) = 2x^2+y^2-4xy-4yz$ замену переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1, \\ y = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1, \\ z = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1, \end{cases}$$

получим $\Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = x_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2$. Уравнение $\Phi(x,y,z) = 1 \Longleftrightarrow x_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2 = 1$ задает однополостной гиперболоид с полуосями 1, $\frac{1}{2}$ (вещественными) и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (мнимой).

5. Методом Лагранжа преобразовать уравнение $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 1$ к стандартному виду и определить тип кривой.

Решение. Сделав следующее преобразование координат

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2} \end{cases}$$

получим уравнение $\frac{1}{4}(y_1^2-y_2^2)+y_1 = 1 \Longleftrightarrow y_1^2-y_2^2+4y_1 = 4$. Выделяя в этом уравнении полный квадрат:

$$(y_1+2)^2 - y_2^2 = 8,$$

и делая новую замену переменных:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = y_1 + 2, \\ z_2 = y_2; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{z_1+z_2}{2} - 1, \\ x_2 = \frac{z_1-z_2}{2} - 1, \end{array}\right.$$

получаем

$$z_1^2 - z_2^2 = 8.$$

Таким образом, уравнение задает гиперболу. Определить ее полуоси методом Лагранжа невозможно.

6. Ортогональным преобразованием и сдвигом преобразовать уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx - 2yz + 2x = 1$ к стандартному виду, определить тип поверхности и ее метрические характеристики.

Решение. Прежде всего приведем квадратичную форму $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx - 2yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Квадратичная форма $\Phi(x, y, z)$ может быть записана в виде

$$\Phi(x, y, z) = (A\vec{f}, \vec{f}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = (x, y, z)^t.$$

Диагонализуем симметричную матрицу A ортогональным подобным преобразованием. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $d_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Решая задачу $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$, получим общее решение $\vec{x} = C_1(-1, 1, 0)^t + C_2(-1, 0, 1)$, ортогонализуя и нормируя полученную фундаментальную систему решений, получаем два ортогональных и нормированных собственных вектора, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: $\vec{f_1} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^t$, $\vec{f_2} = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$. Третий нормированный собственный вектор, ортогональный двум предыдущим, соответствует собственному значению $\lambda_3 = -1$: $\vec{f_3} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^t$. Далее, составим ортогональную матрицу T из столбцов $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При замене переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \end{array}\right.$$

уравнение переходит в следующее: $2x_1^2+2y_1^2-z_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x_1+\frac{2}{\sqrt{6}}y_1+\frac{2}{\sqrt{3}}z_1 = 1$. Выделим в последнем уравнении полные квадраты:

$$2(x_1-\frac{1}{\sqrt{8}})^2+2(y_1+\frac{1}{\sqrt{24}})^2-(z_1-\frac{1}{\sqrt{3}})^2=1.$$

Сделав замену переменной

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{24}}, \\ z_2 = z_1 - \frac{}{\sqrt{3}}, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 + \frac{1}{2}, \\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

приходим к уравнению $2x_2^2+2y_2^2-z_2^2=1$ однополостного гиперболоида с полуосями $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1 (последняя полуось — мнимая).

Задачи для самостоятельного решения

1. Выразить квадратичную форму

$$\Phi(x,y)=(A\vec{f},\vec{f}), \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}=(x,y)^t,$$

через координаты вектора $\vec{f}$.

2. Найти симметричную 3×3-матрицу A, отвечающую квадратичной форме $\Phi(x,y,z)=2x^2+y^2+xz-2yz$:

$$\Phi(x,y,z)=2x^2+y^2+xz-2yz=(A\vec{f},\vec{f}), \quad \vec{f}=(x,y,z)^t.$$

3. Привести квадратичную форму

$$\Phi(x,y,z)=xy+yz+xz$$

к сумме квадратов методом Лагранжа (выделением полных квадратов). Определить какого типа поверхность задает уравнение $\Phi(x,y,z)=1$.

4. Привести квадратичную форму

$$\Phi(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz$$

к сумме квадратов при помощи ортогонального преобразования. Определить какого типа поверхность задает уравнение $\Phi(x,y,z)=1$ и найти метрические характеристики этой поверхности.

5. Методом Лагранжа преобразовать уравнение $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-4x_1-6x_2+3=0$ к стандартному виду и определить тип кривой.

6. Ортогональным преобразованием и сдвигом преобразовать уравнение $4xy+y^2+4yz+2z^2-4x-2y-5=0$ к стандартному виду, определить тип поверхности и ее метрические характеристики.