САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ "ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект "Инновационная образовательная среда в классическом университете"

Пилотный проект №22 «Разработка и внедрение
инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

Аналитическая геометрия. Задачи к коллоквиуму (усиленный поток)

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007 г.

- Рецензент: д. ф. м. н., профессор М. Ш. Бирман

- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.

- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

Аналитическая геометрия. Задачи к коллоквиуму (усиленный поток). — СПб., 2007

В учебно-методическом пособии содержится материал к коллоквиуму по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре для студентов, обучающихся в усиленном потоке. Этот материал посвящен разделу "Аналитическая геометрия". Приведен список теоретических вопросов к коллоквиуму и набор типовых задач, предлагаемых студентам на коллоквиуме, с образцами решений и комментариями.
Пособие предназначено для студентов 1-го курса.

Аналитическая геометрия.
Задачи к коллоквиуму (усиленный поток)

Материал, который выносится на коллоквиум по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре, посвящен разделу "Аналитическая геометрия". Предлагаемое пособие содержит набор типовых задач, предлагаемых студентам на коллоквиуме, с образцами решений и комментариями. Задачи разделены по темам, при этом нумерация задач — сквозная. Задачи имеют разный уровень сложности. В скобках указана сложность задачи по десятибальной шкале. Вначале приведен список теоретических вопросов, которые выносятся на коллоквиум.

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие вектора и линейные операции над векторами.
2. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты.
3. Компонента вектора по оси. Проекция вектора на ось.
4. Прямоугольные декартовы системы координат. Ориентация пространства.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Определители второго и третьего порядков.
7. Понятие о псевдовекторе. Векторное произведение векторов.
8. Смешанное произведение векторов.
9. Двойное векторное произведение.
10. Прямая на плоскости: общее уравнение, уравнение прямой в отрезках на осях, уравнение с угловым коэффициентом.
11. Прямая на плоскости: нормальное уравнение, расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых.
12. Прямая на плоскости: каноническое и параметрические уравнения прямой.
13. Плоскость в пространстве: общее уравнение плоскости, нормальное уравнение.
14. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей.
15. Прямая в пространстве: общие, канонические и параметрические уравнения прямой.

16. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.
17. Окружность и эллипс.
18. Гипербола.
19. Парабола.
20. Преобразование декартовых координат на плоскости.
21. Преобразование общего уравнения второй степени на плоскости.
22. Преобразование декартовых координат в трехмерном пространстве. Ортогональные матрицы.

Задачи к коллоквиуму

Тема 1. Векторная алгебра

1.1. Линейные операции над векторами

Задача 1. (5 баллов). Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, найти векторы, коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

Задача 2. (7 баллов). Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка O. Докажите, что если

$$\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} + \delta\vec{OD} = \vec{0},$$

то числа α, β, γ, δ одного знака.

1.2. Проекция вектора на ось

Задача 3. (7 баллов). В основании пирамиды лежит семиугольник. Можно ли на всех ее ребрах так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю?

1.3. Скалярное произведение векторов

Задача 4. (8 баллов). На внешних нормалях к граням тетраэдра отложены векторы, по длине равные площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

Задача 5. (4 балла). Чему равна сумма

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три единичных вектора, удовлетворяющие условию $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2$?

1.4. Определители второго и третьего порядков

Задача 6. (5 баллов). Докажите, что точки $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ лежат на одной прямой, если и только если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.5. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение

Задача 7. (9 баллов). Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — заданные ненулевые векторы, можно ли подобрать $\vec{x}$ так, чтобы $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{x}$? Всегда ли задача имеет решение? Если решения существуют, то опишите множество всех решений.

Задача 8. (9 баллов). Даны ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:
1) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$
2) если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отложить от одной точки, то концы векторов лежат на одной прямой.

Задача 9. (9 баллов). Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что сумма квадратов площадей трех его попарно непараллельных граней равна сумме квадратов площадей граней тетраэдра A_1BC_1D.

Задача 10. (8 баллов). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три линейно независимых вектора. Доказать, что для любого вектора $\vec{x}$ справедливо тождество

$$\vec{x} = \frac{(\vec{x} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} \vec{a} + \frac{(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} \vec{b} + \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{x}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} \vec{c} \tag{1}$$

(представляющее собой разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Задача 11. (8 баллов). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — единичные векторы, идущие из центра правильного тетраэдра по направлению к его вершинам. Докажите, что для произвольного вектора $\vec{x}$ справедливо тождество

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{x})\vec{c} + (\vec{d} \cdot \vec{x})\vec{d} = \frac{4\vec{x}}{3}. \tag{2}$$

1.6. Двойное векторное произведение векторов

Задача 12. (5 баллов). Пусть $\vec{a}$ — данный ненулевой вектор. Доказать, что для любого вектора $\vec{x}$ справедлива формула

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} + \frac{\vec{a}\times(\vec{x}\times\vec{a})}{|\vec{a}|^2}$$

(преставляющая собой разложение вектора $\vec{x}$ на компоненту по вектору $\vec{a}$ и ортогональную составляющую).

Задача 13. (10 баллов). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — данные ненулевые векторы и α — данное число. Можно ли найти вектор $\vec{x}$, одновременно удовлетворяющий двум уравнениям: $\vec{x}\cdot\vec{a} = \alpha$ и $\vec{x}\times\vec{b} = \vec{c}$? Всегда ли задача имеет решение? Если решения существуют, то опишите множество всех решений.

Тема 2. Прямая и плоскость

2.1. Прямая на плоскости

Задача 14. (5 баллов). На оси абсцисс найти точку, которая отстоит от прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ на расстояние a.

Задача 15. (8 баллов). Пусть M_0 — точка пересечения двух непараллельных прямых L_1 и L_2 на плоскости. Прямые заданы уравнениями $L_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Доказать, что уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_0 имеет вид

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0. \tag{3}$$

Иначе говоря, требуется доказать: 1) для любой пары чисел λ, μ, таких что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, уравнение (3) задает некоторую прямую, проходящую через точку M_0; 2) для любой прямой, проходящей через точку M_0, найдутся числа λ, μ (хотя бы одно из которых не равно нулю) такие, что уравнение этой прямой имеет вид (3).

Задача 16. (6 баллов). Прямая линия перемещается так, что отрезки, отсекаемые ею на осях координат, сохраняют постоянное отношение $a : b = q$. Найти траекторию точки, делящей в отношении λ отрезок подвижной прямой, заключенной между осями координат.

Задача 17. (9 баллов). Докажите следующее утверждение. Чтобы три данные прямые $L_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $L_3: \ A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходили через одну и ту же точку, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы, составленной из коэффициентов уравнений и свободных членов, обращался в ноль, то есть,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. Плоскость

Задача 18. (6 баллов). Проверить, что плоскость, перпендикулярная к диагонали куба и проходящая через ее середину, пересекает куб по правильному шестиугольнику.

Задача 19. (9 баллов). Пусть прямая L_0 задана общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. (Плоскости $\Pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ считаются непараллельными.) Доказать, что уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L_0, имеет вид

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0, \quad \lambda^2+\mu^2 \neq 0. \tag{4}$$

Иначе говоря, требуется доказать: 1) для любой пары чисел λ, μ, таких что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, уравнение (4) задает некоторую плоскость, проходящую через прямую L_0; 2) для любой плоскости, проходящей через прямую L_0, найдутся числа λ, μ (хотя бы одно из которых не равно нулю) такие, что уравнение этой плоскости имеет вид (4).

Задача 20. (9 баллов). Пусть M_0 — точка пересечения трех плоскостей $\Pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\Pi_3 : \ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. (Считается, что точка пересечения этих трех плоскостей единственна.) Доказать, что уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_0, имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +& \\ \nu(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0.& \end{aligned} \tag{5}$$

Иначе говоря, требуется доказать: 1) для любой тройки чисел λ, μ, ν, таких что $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$, уравнение (5) задает некоторую плоскость, проходящую через точку M_0; 2) для любой плоскости, проходящей через точку M_0, найдутся числа λ, μ, ν (хотя бы одно из которых не равно нулю) такие, что уравнение этой плоскости имеет вид (5).

2.3. Прямая в пространстве

Задача 21. (5 баллов). Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями: $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

Задача 22. (8 баллов). Пусть L_1, L_2, L_3 — три попарно пересекающихся прямых, лежащих в одной плоскости П. Прямая L образует с прямыми L_1, L_2, L_3 равные углы. Доказать, что прямая L ортогональна плоскости П.

Задача 23. (6 баллов). Пусть L_1 и L_2 — скрещивающиеся прямые. Пусть $\vec{s}_1$ — направляющий вектор прямой L_1, а $\vec{s}_2$ — направляющий вектор прямой L_2. Пусть $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где M_1 — некоторая точка, лежащая на прямой L_1, и M_2 — некоторая точка, лежащая на прямой L_2. Доказать, что расстояние d между прямыми L_1 и L_2 вычисляется по формуле

$$d = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \vec{r}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

Задача 24. (7 баллов). Дан куб с ребром 1. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух его соседних граней.

Задача 25. (7 баллов). Докажите, что прямая L образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми, если и только если она перпендикулярна биссектрисе одного из образуемых ими углов.

Тема 3. Кривые второго порядка

3.1. Эллипс

Задача 26. (9 баллов). Доказать, что касательная к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

проведенная через точку $M_0(x_0, y_0)$ (лежащую на эллипсе), задается уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Задача 27. (9 баллов). Сформулировать и доказать оптическое свойство эллипса.

3.2. Гипербола

Задача 28. (8 баллов). Найти условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 29. (6 баллов). Найдите геометрическое место середин хорд гиперболы, проходящих через ее вершину.

Задача 30. (9 баллов). Сформулировать и доказать оптическое свойство гиперболы.

3.3. Парабола

Задача 31. (9 баллов). Прямой угол передвигается так, что его стороны касаются параболы. Найдите траекторию его вершины.

Задача 32. (7 баллов). Сформулировать и доказать оптическое свойство параболы.

3.4. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду

Задача 33. (6 баллов). При каких a уравнение $x^2 + axy + y^2 = 1$ задает эллипс?

Задача 34. (6 баллов). При каких a уравнение $x^2 + axy + y^2 = 1$ задает гиперболу?

Задача 35. (7 баллов). Выяснить, какую кривую задает уравнение

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 1.$$

На какой угол надо повернуть оси координат, чтобы ортогональным преобразованием привести это уравнение к каноническому виду?

Тема 4. Преобразования декартовых координат. Ортогональные матрицы

Задача 36. (7 баллов). Дана матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

При каких a, b, c она является ортогональной? В каком случае соответствующее преобразование сохраняет ориентацию пространства?

Задача 37. (7 баллов). Выяснить, при каких значениях a, b, c, d, m, n ортогональна следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & d & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ m & \frac{1}{\sqrt{2}} & n \end{pmatrix}.$$

Изменяет ли преобразование, соответствующее этой матрице, ориентацию пространства?

Задача 38. (7 баллов). Выяснить, при каких значениях a, b, c, d, m, n ортогональна следующая матрица

$$\begin{pmatrix} 1/2 & a & b \\ c & -1 & d \\ m & n & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Изменяет ли преобразование, соответствующее этой матрице, ориентацию пространства?

Образцы решений

Решение задачи 4. Обозначим площади граней тетраэдра через S_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Пусть точка O — какая-либо внутренняя точка тетраэдра. Через h_j обозначим длину перпендикуляра, опущенного из точки O на j-ую грань. Тогда исходный тетраэдр $ABCD$ разбивается на четыре тетраэдра $OABC$, $OACD$, $OBCD$, $OABD$. Суммируя объемы этих тетраэдров, получаем:

$$\sum_{j=1}^{4} h_j S_j = 3V,$$

где V — объем исходного тетраэдра. Для другой внутренней точки O' также выполнено

$$\sum_{j=1}^{4} h'_j S_j = 3V.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{4} (h_j - h'_j) S_j = 0. \tag{6}$$

Пусть $\vec{S_j}$ — вектор, направленный по внешней нормали к j-ой грани, и по величине равный S_j. Вычислим скалярное произведение вектора $\vec{OO'}$ на вектор $\vec{S_j}$: $\vec{OO'} \cdot \vec{S_j} = (h_j - h'_j) S_j$. Тогда равенство (6) означает, что

$$\vec{OO'} \cdot \left(\sum_{j=1}^{4} \vec{S_j} \right) = 0.$$

Это выполнено для произвольного (по направлению) вектора $\vec{OO'}$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{4} \vec{S_j} = \vec{0}$. •

Комментарий к задаче 10. При решении этой задачи полезно использовать соображение линейности. Поскольку соотношение (1) линейно относительно вектора $\vec{x}$, то, используя разложение этого вектора по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, легко убедиться, что достаточно проверить справедливость тождества (1) лишь при $\vec{x} = \vec{a}$, $\vec{x} = \vec{b}$ и $\vec{x} = \vec{c}$.

Комментарий к задаче 11. Здесь также полезно использовать соображение линейности, поскольку соотношение (2) линейно относительно вектора $\vec{x}$. Кроме того, при решении задачи 11 может пригодиться результат задачи 10.

Решение задачи 13. Фиксируем выбор ориентации. Будем считать, что выбрана положительная ориентация пространства.

Из уравнения $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$ видно, что необходимым условием, которое следует наложить на векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является условие их ортогональности: $\vec{b} \perp \vec{c}$. (Иначе решение не существует.) Будем считать это условие выполненным. Домножим уравнение $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$ векторно на $\vec{a}$:

$$\vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c}.$$

Левую часть преобразуем по формуле (известной, как "$bac - cab$") для двойного векторного произведения:

$$\vec{x}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{x}) = \vec{a} \times \vec{c}. \tag{7}$$

Подставляя уравнение $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$ в (7), получаем:

$$\vec{x}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \alpha\vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}. \tag{8}$$

Далее выделяются два случая: случай 1, когда $\vec{a} \not\perp \vec{b}$, и случай 2, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Начнем с более простого случая 1. Поскольку $\vec{a} \not\perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, и вектор $\vec{x}$ может быть найден явно из уравнения (8):

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{c} + \alpha\vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}. \tag{9}$$

Нетрудно проверить прямой подстановкой, что вектор (9) удовлетворяет обоим уравнениям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$ и $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$. Итак, в случае 1 решение существует и единственно.

Перейдем к случаю 2. Поскольку сейчас $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то (8) означает, что заданные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и число α должны подчиняться условию

$$-\alpha\vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}. \tag{10}$$

Иначе решение не существует. Будем считать условие (10) выполненным. Из уравнения $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$ ясно, что $\vec{x} \perp \vec{c}$. Тогда решением является произвольный вектор $\vec{x}$, ортогональный к $\vec{c}$ и удовлетворяющий уравнению $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$. Считая $\alpha \neq 0$ (случай 2а), проверим, что второе уравнение выполнено автоматически. При этом используем соотношение (10), формулу для двойного векторного произведения и условие $\vec{x} \perp \vec{c}$. Тогда

$$\vec{x} \times \vec{b} = -\frac{1}{\alpha}\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = -\frac{1}{\alpha}\vec{a}(\vec{x} \cdot \vec{c}) + \frac{1}{\alpha}\vec{c}(\vec{x} \cdot \vec{a}) = \vec{c}.$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае решений бесконечно много. Решения лежат в плоскости Π, перпендикулярной вектору $\vec{c}$. Решения можно параметризовать углом γ между $\vec{a}$ и $\vec{x}$. При этом, если $\alpha > 0$, то $\gamma_0 \leq \gamma < \pi/2$, а если $\alpha < 0$, то $\pi/2 < \gamma \leq \pi - \gamma_0$. Здесь γ_0 — угол между вектором $\vec{a}$ и плоскостью Π. При заданном γ длину вектора $\vec{x}$ можно найти по формуле

$$|\vec{x}| = \frac{\alpha}{|\vec{a}| \cos \gamma}.$$

Остается разобрать случай 2б, когда $\alpha = 0$. Условие (7) в этом случае означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Тогда для любого вектора $\vec{x}$, ортогонального к $\vec{c}$ автоматически выполняется $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0 = \alpha$. Решением в этом случае является любой вектор $\vec{x}$, ортогональный к $\vec{c}$ и удовлетворяющий уравнению $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$. Решений бесконечно много. Решение $\vec{x}$ можно параметризовать углом β между $\vec{x}$ и $\vec{b}$. (При этом $0 < \beta < \pi$.) Длина вектора $\vec{x}$ находится из соотношения

$$|\vec{x}| = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}| \sin \beta},$$

а направление (из двух возможных) выбирается так, чтобы $\vec{x}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образовывали правую тройку.

Ответ.

1) В случае $\vec{b} \not\perp \vec{c}$ задача не имеет решений.
2) В случае $\vec{b} \perp \vec{c}$ и $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ решение существует и единственно. Оно определяется формулой (9).
3) Если $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ но $-\alpha\vec{b} \neq \vec{a} \times \vec{c}$, то задача не имеет решений.
4) Если $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $-\alpha\vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, то решений бесконечно много.

Решение задачи 15. 1) Координаты x_0, y_0 точки M_0 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0, \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

(Эта система имеет единственное решение, поскольку по условию прямые L_1 и L_2 непараллельны, то есть $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.) Очевидно, координаты x_0, y_0 будут также удовлетворять уравнению

$$\lambda(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1) + \mu(A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2) = 0,$$

какими бы ни были числа λ и μ.

Таким образом, для любой пары чисел λ, μ (хотя бы одно из которых отлично от нуля) прямая L, заданная уравнением (3), проходит через точку M_0.

2) Обратно, пусть L — некоторая прямая, проходящая через точку M_0. Требуется показать, что найдутся такие числа λ, μ, что уравнение прямой L имеет вид (3).

Пусть $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j}$ — вектор нормали к прямой L_1, и $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j}$ — вектор нормали к прямой L_2. Векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ неколлинеарны (так как по условию прямые L_1 и L_2 непараллельны). Тогда векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ образуют базис на плоскости. Пусть $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ — (ненулевой) вектор нормали к прямой L. Разложим вектор $\vec{n}$ по базису $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$: $\vec{n} = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$. При этом $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, поскольку $\vec{n} \neq \vec{0}$. Получаем:

$$\vec{n} = \lambda(A_1\vec{i} + B_1\vec{j}) + \mu(A_2\vec{i} + B_2\vec{j}) = (\lambda A_1 + \mu A_2)\vec{i} + (\lambda B_1 + \mu B_2)\vec{j}.$$

Уравнение прямой L, проходящей через точку M_0 с координатами x_0, y_0, перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}$, имеет вид

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)(x - x_0) + (\lambda B_1 + \mu B_2)(y - y_0) = 0,$$

что можно переписать в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y - A_1x_0 - B_1y_0) + \mu(A_2x + B_2y - A_2x_0 - B_2y_0) = 0. \quad (12)$$

Из (11) следует, что $-A_1x_0 - B_1y_0 = C_1$, $-A_2x_0 - B_2y_0 = C_2$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Решение задачи 22. Пусть $\vec{s}$ — направляющий вектор прямой L. По условию прямая L образует равные углы с прямыми L_1, L_2, L_3. Пусть $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ — единичные направляющие векторы прямых L_1, L_2, L_3 соответственно. Каждый из этих векторов определен с точностью до замены его направления на противоположное. Тогда можно фиксировать выбор направления этих векторов так, что будут выполнены равенства

$$\vec{s} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s} \cdot \vec{s}_2 = \vec{s} \cdot \vec{s}_3.$$

Отсюда следует, что $\vec{s} \perp \vec{s}_1 - \vec{s}_2$ и $\vec{s} \perp \vec{s}_1 - \vec{s}_3$.

Поскольку по условию L_1, L_2, L_3 — три попарно пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости П, то единичные векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ компланарны, но среди них нет коллинеарной пары. В этом случае векторы $\vec{a} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$ и $\vec{b} = \vec{s}_1 - \vec{s}_3$ неколлинеарны. Действительно, если бы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, это означало бы, что концы векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$, проведенных из одной точки, лежат на одной прямой. Для единичных векторов (среди которых нет коллинеарной пары) это невозможно.

Таким образом, мы показали, что вектор $\vec{s}$ перпендикулярен к двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащим в плоскости П. Поскольку любой вектор, лежащий в плоскости П, можно разложить по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, то вектор $\vec{s}$ ортогонален ко всем векторам, лежащим в этой плоскости.

Решение задачи 27. Формулировка оптического свойства эллипса приводится на лекциях. *Физическая формулировка* состоит в том, что луч света, выпущенного из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса приходит в другой фокус. Используя закон отражения (угол падения равен углу отражения) легко дать *математическую формулировку* оптического свойства: касательная к эллипсу в данной точке эллипса образует равные углы с фокальными радиусами, проведенными в эту точку.

Рассмотрим эллипс, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть F_1 — фокус с координатами $(-c, 0)$, и F_2 — фокус с координатами $(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Пусть M_0 — точка с координатами (x_0, y_0), лежащая на эллипсе. Уравнение касательной L к эллипсу, проведенной через точку M_0, имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{xx_0}{\lambda a^2} + \frac{yy_0}{\lambda b^2} - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}.$$

По формуле для расстояния от точки до прямой вычислим расстояние h_1 от фокуса F_1 до касательной L:

$$h_1 = \left| -\frac{cx_0}{\lambda a^2} - \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda a}(a + ex_0). \tag{13}$$

Аналогично, расстояние h_2 от фокуса F_2 до L равно

$$h_2 = \left| \frac{cx_0}{\lambda a^2} - \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda a}(a - ex_0). \tag{14}$$

Здесь использовано обозначение $e = \frac{c}{a}$ (e — эксцентриситет эллипса).

Далее, пусть $r_1 = |F_1M_0|$, $r_2 = |F_2M_0|$ — фокальные радиусы точки M_0. Воспользуемся формулами для фокальных радиусов:

$$r_1 = a + ex_0, \quad r_2 = a - ex_0. \tag{15}$$

Пусть α — (меньший) угол между касательной L и фокальным радиусом $\vec{r}_1 = F_1\vec{M}_0$, и пусть β — (меньший) угол между касательной L и фокальным радиусом $\vec{r}_2 = F_2\vec{M}_0$. Ясно, что

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{r_1}, \quad \sin\beta = \frac{h_2}{r_2}.$$

Из (13)–(15) видно, что

$$\sin\alpha = \sin\beta = \frac{1}{\lambda a}.$$

Следовательно, $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Решение задачи 33. Рассмотрим уравнение $x^2 + axy + y^2 = 1$. В соответствии с общей процедурой приведения уравнения второго порядка к каноническому виду, надо избавиться от перекрестного члена за счет поворота осей координат на подходящий угол. При этом, если члены второго порядка имеют вид $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, где $A = C$, то следует повернуть оси на угол $\pi/4$. Тогда новые координаты x', y' связаны с исходными координатами x, y формулами

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2, \quad 2xy = (x')^2 - (y')^2.$$

Уравнение $x^2 + axy + y^2 = 1$ перепишется в виде

$$(x')^2 + (y')^2 + \frac{a}{2}((x')^2 - (y')^2) = 1,$$

или

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)(x')^2 + \left(1 - \frac{a}{2}\right)(y')^2 = 1.$$

Это уравнение задает эллипс при условиях

$$1 + \frac{a}{2} > 0, \quad 1 - \frac{a}{2} > 0,$$

т. е., при $-2 < a < 2$.

Ответ. Уравнение $x^2 + axy + y^2 = 1$ задает эллипс, если $-2 < a < 2$.

Решение задачи 38. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & a & b \\ c & -1 & d \\ m & n & 1/2 \end{pmatrix}$$

и выясним, при каких значениях параметров она является ортогональной. Строки ортогональной матрицы представляют собой координаты единичных попарно ортогональных векторов. Запишем сначала условия, что строки — единичные:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} + a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + 1 + d^2 = 1 \\ m^2 + n^2 + \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases} \tag{16}$$

Из второго равенства следует, что $c = d = 0$. С учетом этого ортогональность первой и второй строки означает, что $a \cdot (-1) = 0$. Ортогональность второй и третьей строки означает, что $(-1) \cdot n = 0$. Таким образом, $a = n = 0$. Тогда первое и третье равенства в (16) дают $b^2 = m^2 = \frac{3}{4}$. Наконец, ортогональность первой и третьей строк означает, что $\frac{1}{2} \cdot m + b \cdot \frac{1}{2} = 0$, то есть $m = -b$. Таким образом, либо $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, либо $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Мы получили два варианта ответа:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

либо

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что определитель матрицы A (в обоих вариантах) равен -1. Это означает, что преобразование координат, отвечающее этой матрице, меняет ориентацию пространства на противоположную.