САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ "ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект "Инновационная образовательная среда в классическом университете"

Пилотный проект №22 «Разработка и внедрение
инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

Высшая алгебра. Задачи к коллоквиуму во втором семестре (усиленный поток)

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007 г.

- Рецензент: д. ф. м. н., профессор М. Ш. Бирман
- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

Высшая алгебра. Задачи к коллоквиуму во втором семестре (усиленный поток). — СПб., 2007

В учебно-методическом пособии содержится материал к коллоквиуму по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре для студентов, обучающихся в усиленном потоке. Приведен список теоретических вопросов к коллоквиуму и набор типовых задач, предлагаемых студентам на коллоквиуме, с образцами решений и комментариями. Пособие предназначено для студентов 1-го курса.

Высшая алгебра.
Задачи к коллоквиуму во втором семестре
(усиленный поток)

Материал, который выносится на коллоквиум по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре, содержит разделы "Общие алгебраические структуры", "Линейные пространства", "Линейные операторы".

Предлагаемое пособие содержит набор типовых задач, предлагаемых студентам на коллоквиуме, с образцами решений и комментариями. Задачи разделены по темам. При этом нумерация задач — сквозная. Задачи имеют разный уровень сложности. В скобках указана сложность задачи по десятибальной шкале.

Вначале приведен список теоретических вопросов, которые выносятся на коллоквиум.

Вопросы к коллоквиуму

1. Множества с бинарной операцией. Нейтральный элемент. Обратный элемент.
2. Группы. Кольца.
3. Поля. Понятие изоморфизма. Изоморфизм групп и колец.
4. Аксиоматика линейного пространства. Примеры. Изоморфизм линейных пространств.
5. Понятие линейной зависимости и независимости. Базисы, координаты.
6. Размерность линейного пространства. Изоморфизм конечномерных линейных пространств.
7. Подпространства. Линейная оболочка множества.
8. Пересечение подпространств. Линейная сумма подпространств, прямая сумма подпространств.
9. Теорема о размерности линейной суммы подпространств. Дополнение подпространства.
10. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах. Определение и примеры. Действия над операторами. Пространство линейных операторов.
11. Матричное изображение линейных операторов. Примеры изображающих матриц.

12. Изоморфизм пространства операторов и пространства матриц. Изображающая матрица для композиции операторов.
13. Образ и ранг линейного оператора. Ядро оператора.
14. Линейные уравнения в линейном пространстве. Классификация линейных отображений. Альтернатива Фредгольма.
15. Преобразование базисов, координат и изображающих матриц операторов.
16. Определитель и след линейного оператора. Ориентация в вещественном конечномерном линейном пространстве.
17. Характеристический многочлен и спектр линейного оператора.
18. Собственные элементы, собственные подпространства. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
19. Критерий существования собственного базиса. Диагонализуемые операторы. Диагонализуемые матрицы.
20. Функции от операторов. Тождество Кэли.

Задачи к коллоквиуму

Тема 1. Общие алгебраические структуры

Задача 1. (6 баллов). Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств относительно указанной операции:

1) целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения;
2) неотрицательные целые числа относительно сложения;
3) положительные рациональные числа относительно умножения;
4) корни n-ой степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения;
5) матрицы порядка n с целыми элементами относительно умножения;
6) матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1, относительно умножения;
7) положительные действительные числа с операцией $a * b = a^2 b^2$.

Задача 2. (6 баллов). Доказать, что если $a^2 = e$ (где e — нейтральный элемент группы G) для любого $a \in G$, то группа G — абелева.

Задача 3. (7 баллов). Доказать, что следующие группы изоморфны друг другу:

G_1 — целые числа относительно сложения,

G_2 — четные числа относительно сложения,

G_3 — целые числа, кратные n, относительно сложения,

G_4 — степени данного числа $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, \pm 1$) с целыми показателями относительно умножения.

Задача 4. (7 баллов). Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями (относительно сложения и умножения чисел):

1) целые числа;
2) целые числа, кратные данному числу n;
3) рациональные числа;
4) числа вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a, b;
5) числа вида $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a, b.

Задача 5. (7 баллов). Доказать, что все матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b образуют поле (относительно сложения и умножения матриц), а множество матриц того же вида с вещественными a, b образуют кольцо (но не поле).

Задача 6. (7 баллов). Образуют ли кольцо все тригонометрические многочлены вида

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

(где m — любое натуральное число) с вещественными коэффициентами a_k, b_k? Выяснить то же для многочленов только от косинусов

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx$$

и для многочленов только от синусов

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sin kx.$$

Задача 7. (7 баллов). Доказать, что все диагональные матрицы порядка $n \geq 2$ с вещественными элементами образуют коммутативное кольцо (относительно сложения и умножения матриц) с делителями нуля.

Задача 8. (7 баллов). Доказать, что поле матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b изоморфно полю чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a, b.

Задача 9. (7 баллов). Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где a, b — вещественные числа, образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел.

Тема 2. Линейные пространства

Задача 10. (6 баллов). Выяснить, является ли линейным подпространством соответствующего пространства каждое из следующих множеств. Если да, то найти размерность и указать какой-либо базис подпространства.

1) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\xi^1 + \xi^2 + \ldots + \xi^n = 0$;
2) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\xi^1 + \xi^2 + \ldots + \xi^n = 1$;
3) все векторы из $\mathbb{R}^n$, для которых $\xi^1 = \xi^n$;
4) все векторы из $\mathbb{R}^n$, у которых координаты с четными номерами равны нулю;
5) все векторы из $\mathbb{R}^n$, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

Задача 11. (7 баллов). а) Доказать, что все симметричные матрицы (с вещественными элементами) n-го порядка образуют линейное подпространство пространства всех вещественных матриц n-го порядка.

б) Доказать, что все кососимметричные матрицы (с вещественными элементами) n-го порядка образуют линейное подпространство пространства всех вещественных матриц n-го порядка.

Найти размерности и указать какие-либо базисы этих подпростанств.

Задача 12. (7 баллов). Выяснить, является ли линейным подпространством пространства M^n матриц n-го порядка каждое из следующих множеств. Если да, то найти размерность и указать какой-либо базис подпространства.

1) матрицы $A \in M^n$ с $\det A = 0$;
2) матрицы $A \in M^n$ с $\operatorname{Tr} A = 0$;
3) матрицы $A \in M^n$ с $\operatorname{Tr} A > 0$.

Задача 13. (7 баллов). Доказать, что пространство $C([0,1])$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций (с вещественными значениями) раскладывается в прямую сумму подпространства $F = \{\text{const}\}$ постоянных функций и подпространства $G = \{g : g(x_0) = 0\}$, состоящего из всех непрерывных функций, обращающихся в ноль в данной точке $x_0 \in [0,1]$. (Предварительно проверьте, что все три рассматриваемых пространства являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.)

Задача 14. (10 баллов). Доказать, что пространство $C([0,1])$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций (с вещественными значениями) раскладывается в прямую сумму подпространства Ω_{n-1} многочленов (с вещественными коэффициентами) степени не выше $(n-1)$ и подпространства $G = \{g : g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_n) = 0\}$, состоящего из всех непрерывных функций, обращающихся в ноль в данных точках x_j, $j = 1, \ldots, n$, где $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 1$. (Предварительно проверьте, что все три рассматриваемых пространства являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.)

Задача 15. (7 баллов). Доказать, что $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму подпространства $F = \{x \in \mathbb{R}^n : \xi^1 + \xi^2 + \ldots + \xi^n = 0\}$ и подпространства $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \xi^1 = \xi^2 = \ldots = \xi^n\}$.

Задача 16. (5 баллов). Доказать, что пространство M^n всех матриц n-го порядка есть прямая сумма подпространства всех симметричных матриц и подпространства всех кососимметричных матриц.

Тема 3. Линейные операторы

Задача 17. (6 баллов). Доказать, что ортогональное проектирование трехмерного пространства на ось, образующую равные углы с осями декартовой прямоугольной системы координат, является линейным оператором, и найти его изображающую матрицу в стандартном базисе.

Задача 18. (6 баллов). Доказать, что оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданный формулой

$$A\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a},$$

где $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, является линейным оператором, и найти его изображающую матрицу в стандартном базисе.

Задача 19. (7 баллов). Доказать, что оператор $A : M^2 \to M^2$, заданный умножением на данную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ а) слева, б) справа является линейным оператором, и найти его изображающую матрицу в базисе из "матричных единиц"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 20. (8 баллов). В пространстве Ω_2 многочленов степени ≤ 2 рассматривается оператор A, имеющий в базисе $\{1, t, t^2\}$ изображающую матрицу

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти изображающую матрицу оператора A в базисе

$$e_1(t) = 3t^2 + 2t + 1, \quad e_2(t) = t^2 + 3t + 2, \quad e_3(t) = 2t^2 + t + 3.$$

Задача 21. (6 баллов). Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — некоторый базис в E. Пусть векторы $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$ заданы формулами

$$\widetilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^{j} \mathbf{e}_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

а) Проверьте, что $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$ образуют базис в E и найдите матрицу перехода от исходного базиса к новому.

б) Пусть вектор $\mathbf{x} \in E$ имеет в исходном базисе координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n$, а в новом базисе — координаты $\widetilde{\xi}^1, \ldots, \widetilde{\xi}^n$. Приведите формулы преобразования координат.

в) Пусть $A : E \to E$ — линейный оператор, a — его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, и $\widetilde{a}$ — его изображающая матрица в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$. Приведите формулу преобразования изображающей матрицы (то есть, связь между a и $\widetilde{a}$).

Задача 22. (9 баллов). Найти образ и ядро для следующего оператора, действующего в пространстве Ω_n многочленов степени $\le n$: оператор A сопоставляет многочлену $P(t)$ многочлен

$$Q(t) = P(t+1) - P(t).$$

Задача 23. (8 баллов). Найти образы и ядра для следующих операторов, действующих в пространстве Ω_n многочленов степени $\le n$:

а) оператор D^k дифференцирования порядка k;

б) оператор B, сопоставляющий многочлену $P(t)$ многочлен

$$Q(t) = P(at+b),$$

где a, b — фиксированные вещественные числа, причем $a \neq 0$.

Задача 24. (8 баллов). Найти образы и ядра для следующих операторов, действующих в $\mathbb{R}^3$:

а) для оператора A, заданного формулой

$$A\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{b},$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ — фиксированные ненулевые векторы;

б) для оператора A, заданного формулой

$$A\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 + \xi^2 \\ 0 \\ \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 \end{pmatrix}.$$

Задача 25. (7 баллов). В пространстве M^n $(n \times n)$-матриц с вещественными элементами рассматривается оператор транспонирования A, сопоставляющий матрице b транспонированную матрицу b^t: $Ab = b^t$. Найти собственные значения и собственные элементы. Найти алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и выяснить, является ли оператор A диагонализуемым.

Задача 26. (7 баллов). В пространстве Ω_n многочленов степени $\leq n$ (с вещественными коэффициентами) рассматривается оператор

$$A = t\frac{d}{dt},$$

сопоставляющий многочлену $P(t)$ многочлен $(AP)(t) = tP'(t)$. Найти собственные значения и собственные элементы. Найти алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и выяснить, является ли оператор A диагонализуемым.

Задача 27. (7 баллов). В пространстве Ω_n многочленов степени $\leq n$ (с вещественными коэффициентами) рассматривается оператор

$$A = \frac{1}{t}\int_0^t,$$

сопоставляющий многочлену $P(t)$ многочлен

$$(AP)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)d\tau.$$

Найти собственные значения и собственные элементы. Найти алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и выяснить, является ли оператор A диагонализуемым.

Задача 28. (7 баллов). В пространстве

$$E = \mathcal{L}\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx\}$$

(тригонометрических многочленов степени $\leq m$ с вещественными коэффициентами) рассматривается оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2},$$

сопоставляющий тригонометрическому многочлену $f(x)$ тригонометрический многочлен

$$(Af)(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Найти собственные значения и собственные элементы. Найти алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и выяснить, является ли оператор A диагонализуемым.

Задача 29. (9 баллов). Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть оператор $A \in \Lambda(E)$ имеет n различных собственных значений. Пусть оператор $B \in \Lambda(E)$ коммутирует с A, то есть, $AB = BA$. Докажите, что любой собственный вектор оператора A является собственным и для оператора B.

Задача 30. (7 баллов). Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Докажите, что собственный вектор линейного оператора $A \in \Lambda(E)$ с собственным значением λ является собственным вектором для оператора $P(A)$ с собственным значением $P(\lambda)$. Здесь $P(t)$ — какой-либо многочлен.

Задача 31. (8 баллов). Пусть $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — ненулевая матрица-строка, где все $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Найти собственные значения и собственные векторы $(n \times n)$-матрицы $b = a^t a$. Найти алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений и выяснить, является ли матрица b диагонализуемой.

Задача 32. (8 баллов). В пространстве Ω_n многочленов степени не выше n (с вещественными коэффициентами) рассматривается оператор дифференцирования $A : \Omega_n \to \Omega_n$, сопоставляющий многочлену $P(t)$ его производную: $(AP)(t) = P'(t)$. Найти операторы e^A и $\cos A$.

Образцы решений

Решение задачи 5. Обозначим через X множество матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где a, b — произвольные вещественные числа. Очевидно, это множество замкнуто относительно сложения, поскольку

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно также, что операция сложения на множестве X ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1,$$

$$A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3,$$

для любых матриц $A_1, A_2, A_3 \in X$. В множестве X есть нейтральный элемент по сложению — нулевая матрица

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и для каждой матрицы A вида (1) противоположная матрица

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix}$$

также принадлежит классу X. Мы убедились, что множество X представляет собой абелеву группу по сложению.

Рассмотрим теперь произведение матриц A_1 и A_2 класса X:

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + 2b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ 2(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из (2) видно, что $A_1 A_2$ имеет вид (1) при $a = a_1 a_2 + 2b_1 b_2$, $b = a_1 b_2 + a_2 b_1$. Ясно также, что умножение в классе X коммутативно: $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Таким образом, множество X представляет собой *коммутативное кольцо*. Однако, X не является полем, поскольку существуют необратимые матрицы класса X, отличные от нулевой матрицы. Действительно, если $a = \pm\sqrt{2}b$, то $\det A = a^2 - 2b^2 = 0$, и тогда матрица A необратима.

Обозначим через Y множество матриц вида (1), где a, b — произвольные рациональные числа. Точно так же, как для X, можно проверить, что Y является коммутативным кольцом. При этом любая ненулевая матрица класса Y обратима, поскольку $\det A = a^2 - 2b^2 \neq 0$, если a и b — рациональные числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 2b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}.$$

Ясно, что A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \\ 2\widetilde{b} & \widetilde{a} \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{a} = \frac{a}{a^2 - 2b^2}, \quad \widetilde{b} = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}.$$

Числа $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ рациональны вместе с a и b. Следовательно, $A^{-1} \in Y$. Мы проверили, что $Y \setminus \mathbf{0}$ является абелевой группой по умножению. Таким образом, множество Y представляет собой *поле*.

Решение задачи 14. Прежде всего, отметим, что $C([0,1])$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$, поскольку любая линейная комбинация непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций снова является непрерывной функцией. Далее, множество Ω_{n-1} многочленов степени не выше $(n-1)$ образует подпространство в пространстве $C([0,1])$, поскольку для любых двух многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$ степени не выше $(n-1)$, и любых вещественных чисел α_1, α_2, функция $P(x) = \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x)$ тоже является многочленом степени не выше $(n-1)$. Наконец, множество G образует подпространство в $C([0,1])$: если $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные на $[0,1]$ функции, обращающиеся в ноль в точках $x_1, \ldots, x_n$, и α_1, α_2 — произвольные вещественные числа, то функция $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ также является непрерывной и обращается в ноль в указанных точках.

Проверим теперь, что линейная сумма подпространств Ω_{n-1} и G является прямой суммой. Для этого достаточно убедиться в том, что пересечение этих подпространств состоит лишь из нулевой функции: $\Omega_{n-1} \cap G = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $P \in \Omega_{n-1} \cap G$. Тогда $P(x)$ представляет собой многочлен вида

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_{n-1} x^{n-1},$$

причем

$$P(x_1) = \ldots = P(x_n) = 0.$$

Как известно, ненулевой многочлен степени $(n-1)$ имеет не более, чем $(n-1)$ корень (с учетом кратности). Поскольку у многочлена

$P(x)$ имеется n различных корней, заключаем, что этот многочлен тождественно равен нулю: $P(x) = 0$.

Мы показали, что $\Omega_{n-1} \cap G = \{\mathbf{0}\}$. Следовательно, сумма подпространств Ω_{n-1} и G является прямой суммой.

Покажем теперь, что эта прямая сумма совпадает со всем пространством $C([0,1])$. Для этого надо убедиться, что произвольную непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = P(x) + g(x), \tag{3}$$

где $P(x)$ — некоторый полином степени не выше $(n-1)$, а $g(x)$ — непрерывная функция такая, что

$$g(x_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Для каждого $i = 1, \ldots, n$, построим сначала многочлен $P_i(x)$ степени $(n-1)$, удовлетворяющий условиям

$$P_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то есть $P_i(x)$ обращается в ноль во всех точках x_j, кроме точки x_i, а в точке x_i его значение равно 1. Многочлен $P_i(x)$ легко сконструировать явно:

$$P_i(x) = \frac{\Pi_{j\neq i}(x - x_j)}{\Pi_{j\neq i}(x_i - x_j)} = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Теперь для данной непрерывной функции $f(x)$ обозначим $a_j = f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, и положим

$$P(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i P_i(x).$$

Ясно, что $P(x)$ (называемый *интерполяционным многочленом Лагранжа*) представляет собой многочлен степени не выше $(n-1)$, причем

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поэтому разность $g(x) := f(x) - P(x)$ представляет собой непрерывную функцию, удовлетворяющую равенствам (4). Этим доказано разложение (3).

Решение задачи 19. Приведем решение пункта а). Случай б) рассматривается аналогично.

Базисные матрицы обозначим через e_j, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $A : M^2 \to M^2$ действует как умножение на данную матрицу $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ слева. Линейность оператора A вытекает из свойств действий над матрицами. Для любых матриц $b_1, b_2 \in M^2$ и любых чисел α_1, α_2 выполнено

$$a(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) = \alpha_1 (a b_1) + \alpha_2 (a b_2),$$

то есть,

$$A(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) = \alpha_1 A b_1 + \alpha_2 A b_2.$$

Вычислим теперь матрицы Ae_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Имеем:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \alpha e_1 + \gamma e_3,$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha e_2 + \gamma e_4,$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} = \beta e_1 + \zeta e_3,$$

$$Ae_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \beta e_2 + \zeta e_4.$$

Обозначим через $\widehat{a}$ изображающую матрицу оператора A в базисе e_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Это матрица размера (4×4). В соответствии с общими правилами составления изображающей матрицы, ее i-ый столбец представляет собой координаты элемента Ae_i в базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Таким образом,

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \zeta \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 22. Рассматривается оператор $A : \Omega_n \to \Omega_n$, заданный соотношением

$$(AP)(t) = P(t+1) - P(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишем многочлен $P(t)$:

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_{n-1} t^{n-1} + p_n t^n.$$

Пусть $P \in \operatorname{Ker} A$. Это означает, что $P(t+1) - P(t) = 0$ (тождественно по $t \in \mathbb{R}$), то есть,

$$\begin{aligned} p_0 + p_1(t+1) + p_2(t+1)^2 + \ldots + p_{n-1}(t+1)^{n-1} + p_n(t+1)^n \\ -p_0 - p_1 t - p_2 t^2 - \ldots - p_{n-1} t^{n-1} - p_n t^n = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Многочлен, стоящий в левой части (5), тождественно равен нулю. Следовательно, все коэффициенты при степенях t в левой части (5) равны нулю. Коэффициент при t^n равен нулю автоматически: $p_n - p_n = 0$. Приравняем нулю коэффициент при t^{n-1}: $p_{n-1} + np_n - p_{n-1} = 0$. Отсюда получаем, что $p_n = 0$. Уже с учетом этого приравняем нулю коэффициент при t^{n-2}: $p_{n-2} + (n-1)p_{n-1} - p_{n-2} = 0$. Следовательно, $p_{n-1} = 0$. Продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что все коэффициенты кроме p_0 равны нулю. Таким образом, $P(t) = p_0 = \text{const}$, то есть,

$$\operatorname{Ker} A = \Omega_0.$$