САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ "ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект "Инновационная образовательная среда в классическом университете"

Пилотный проект №22 «Разработка и внедрение инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

Высшая алгебра. Задачи к экзамену во втором семестре (усиленный поток)

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007 г.

- Рецензент: д. ф. м. н., профессор М. Ш. Бирман

- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.

- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

Высшая алгебра. Задачи к экзамену во втором семестре (усиленный поток). — СПб., 2007

В учебно-методическом пособии содержится материал к экзамену по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре для студентов, обучающихся в усиленном потоке. Приведен список теоретических вопросов к экзамену и набор типовых задач, предлагаемых студентам на экзамене, с образцами решений и комментариями.
Пособие предназначено для студентов 1-го курса.

Высшая алгебра.
Задачи к экзамену во втором семестре
(усиленный поток)

Материал, который выносится на экзамен по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре, содержит разделы "Линейные и билинейные формы", "Евклидовы пространства (вещественные и комплексные)", "Линейные операторы в евклидовых пространствах", "Жорданова нормальная форма для линейного оператора".

В программу курса во втором семестре входят также разделы "Общие алгебраические структуры", "Линейные пространства", "Линейные операторы". Этот материал выносится на коллоквиум. Вопросы и задачи к коллоквиуму можно найти в пособии [1].

Предлагаемое пособие содержит набор типовых задач, предлагаемых студентам на экзамене, с образцами решений и комментариями. Задачи разделены по темам. При этом нумерация задач — сквозная. Задачи имеют разный уровень сложности. В скобках указана сложность задачи по десятибальной шкале.

Вначале приведен список теоретических вопросов, которые выносятся на экзамен.

Вопросы к экзамену

1. Линейные формы. Двойственное пространство. Двойственные базисы.
2. Второе двойственное пространство.
3. Преобразования двойственных базисов и координат в E'. Преобразования изображающих матриц операторов из E' в E'; из E в E'; из E' в E.
4. Билинейная форма. Определение, примеры. Пространство билинейных форм.
5. Оператор билинейной формы. Изображающая матрица билинейной формы. Преобразование изображающих матриц билинейной формы.
6. Ядро и ранг билинейной формы. Транспонированная форма. Симметричные и антисимметричные билинейные формы.
7. Квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов (комплексный случай).

8. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов (вещественный случай). Закон инерции квадратичных форм.
9. Вещественные евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортонормированные базисы. Изоморфизм евклидовых пространств.
10. Неравенство Коши. Неравенство треугольника. Процесс ортогонализации.
11. Ортогональная сумма подпространств в вещественном евклидовом пространстве. Ортогональное дополнение.
12. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве. Билинейная форма оператора.
13. Сопряженный (транспонированный) оператор в вещественном евклидовом пространстве. Симметричные и кососимметричные операторы.
14. Изометрические операторы в вещественном евклидовом пространстве.
15. Комплексные евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортонормированные базисы. Изоморфизм евклидовых пространств.
16. Линейные операторы в комплексном евклидовом пространстве. Полуторалинейная форма оператора.
17. Сопряженный оператор. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора.
18. Самосопряженные операторы.
19. Унитарные операторы.
20. Диагонализация самосопряженного оператора. Диагонализация эрмитовой матрицы.
21. Диагонализация унитарного оператора. Диагонализация унитарной матрицы.
22. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием. Применение к поверхностям второго порядка.
23. Классификация поверхностей второго порядка.
24. Обобщенная задача на собственные значения.
25. Приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов.
26. Понятие о жордановой нормальной форме.
27. Теорема разложения по корневым подпространствам.

28. Жорданова нормальная форма для нильпотентного оператора.

Задачи к экзамену

Тема 1. Линейные и билинейные формы

Задача 1. (8 баллов). В пространстве $E = \Omega_n$ многочленов степени не выше n (с вещественными коэффициентами) рассмотрим линейные формы g^k, $k = 0, 1, \dots, n$, сопоставляющие многочлену $P(x)$ его значение в точке $x = k$:

$$g^k(P) = P(k).$$

Докажите, что формы $g^0, g^1, \dots, g^n$ образуют базис в двойственном пространстве E' и найдите базис $P_0, P_1, \dots, P_n$ в E, к которому базис $g^0, g^1, \dots, g^n$ является двойственным.

Задача 2. (8 баллов). В пространстве $E = \Omega_n$ многочленов степени не выше n (с вещественными коэффициентами) рассмотрим линейные формы g^k, $k = 0, 1, \dots, n$, сопоставляющие многочлену $P(x)$ значение его производной порядка k в точке $x = 0$:

$$g^k(P) = \frac{d^k P}{dx^k}|_{x=0}.$$

Докажите, что формы $g^0, g^1, \dots, g^n$ образуют базис в двойственном пространстве E' и найдите базис $P_0, P_1, \dots, P_n$ в E, к которому базис $g^0, g^1, \dots, g^n$ является двойственным.

Задача 3. (9 баллов). В пространстве $E = \Omega_n$ многочленов степени не выше n (с вещественными коэффициентами) рассмотрим линейные формы g^k, $k = 0, 1, \dots, n$, сопоставляющие многочлену $P(x)$ значение интеграла от $P(x)$ по промежутку $[0, k+1]$:

$$g^k(P) = \int\limits_0^{k+1} P(x)\,dx. \qquad (1)$$

Докажите, что формы $g^0, g^1, \dots, g^n$ образуют базис в двойственном пространстве E'.

Задача 4. (7 баллов.) Для следующей квадратичной формы в $\mathbb{R}^3$

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$$

определить индексы инерции в зависимости от значений параметра λ.

Задача 5. (7 баллов.) Для следующей квадратичной формы в $\mathbb{R}^3$

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

определить индексы инерции в зависимости от значений параметра λ.

Задача 6. (7 баллов.) В $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) рассматривается квадратичная форма

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j, \quad q_{ij} = q_{ji} \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что для положительной определенности этой формы условие $q_{jj} > 0$, $j = 1, \ldots, n$, является необходимым, но не достаточным.

Задача 7. (8 баллов.) Найти индексы инерции квадратичной формы $Q(x) = \operatorname{Tr} x^2$ в линейном пространстве M^n, образованном $(n \times n)$-матрицами с вещественными элементами.

Тема 2. Евклидовы пространства

Задача 8. (4 балла.) Доказать, что ортогональная проекция ребра n-мерного куба (в $\mathbb{R}^n$) на его диагональ равна $1/n$ длины диагонали.

Задача 9. (7 баллов.) Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, и $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметричная билинейная форма с индексами инерции $n_+ = n$, $n_- = 0$. Доказать, что имеет место неравенство

$$\sqrt{Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})} \leq \sqrt{Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \sqrt{Q(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E,$$

причем равенство имеет место для тех и только тех векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, для которых выполнено $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{y}$ при некоторых неотрицательных числах α, β, одновременно не равных нулю.

Задача 10. (7 баллов.) Пусть $E = M^n$ — комплексное евклидово пространство $(n \times n)$-матриц (с комплексными элементами) со скалярным произведением $(a, b) = \operatorname{Tr} ab^*$. Пусть $F = \{a \in M^n : \operatorname{Tr} a = 0\}$ — подпространство матриц с нулевым следом. Найти ортогональное дополнение $F^\perp$.

Задача 11. (7 баллов.) Пусть $E = M^n$ — вещественное евклидово пространство $(n \times n)$-матриц (с вещественными элементами) со скалярным произведением $(a, b) = \operatorname{Tr} ab^t$. Пусть F — подпространство симметричных матриц. Найти ортогональное дополнение $F^\perp$.

Задача 12. (7 баллов.) Пусть $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ — ортонормированная система векторов в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{j=1}^{k} (\mathbf{x}, \mathbf{f}_j)^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Неравенство обращается в равенство (равенство Парсеваля) для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $k = n$, т. е. система $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Задача 13. (7 баллов.) Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Доказать, что

а) $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где $\alpha > 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равен нулю.

б) $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где $\alpha < 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равен π.

Задача 14. (8 баллов.) Пусть F — подпространство вещественного евклидова пространства E. Пусть $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in E$, причем $\mathbf{x} \not\perp F$. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in F$, $\mathbf{z} \in F^\perp$. Доказать, что из всех векторов подпространства F наименьший угол с $\mathbf{x}$ образует вектор $\mathbf{y}$, причем равенство $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$, где $0 \neq \mathbf{y}' \in F$, выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}' = \alpha\mathbf{y}$ с некоторым $\alpha > 0$.

Задача 15. (10 баллов.) Пусть Ω_n — вещественное евклидово пространство полиномов степени $\leq n$ (с вещественными коэффициентами) на отрезке $[-1, 1]$. Скалярное произведение полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ задано формулой $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$. Проверьте, что полиномы Лежандра, заданные формулами

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k], \quad k = 1, \ldots, n,$$

образуют ортогональный базис пространства Ω_n. Докажите, что при ортогонализации системы $1, t, t^2, \ldots, t^n$ получится базис, отличающийся от полиномов Лежандра лишь множителями.

Задача 16. (8 баллов.) В $\mathbb{R}^4$ найти угол между подпространствами F и G, где $F = \mathcal{L}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $G = \mathcal{L}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 3. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Задача 17. (8 баллов.) Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, A — линейный оператор в E, $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — полуторалинейная эрмитова форма, причем $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — положительно определенная. Доказать, что если $Q(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ при любом $\mathbf{x} \in E$, то A — нулевой оператор. Верно ли аналогичное утверждение, если E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметричная билинейная форма с индексами $n_+ = n$, $n_- = 0$?

Задача 18. (6 баллов.) В комплексном евклидовом пространстве M^n $(n \times n)$-матриц (с комплексными элементами) со скалярным произведением $(x, y) = \operatorname{Tr} xy^*$ доказать следующие свойства: a) всякая унитарная матрица имеет норму, равную $\sqrt{n}$; b) линейный оператор A в M^n, заданный умножением на унитарную матрицу u: $Ax = ux$, $x \in M^n$, является унитарным оператором.

Задача 19. (6 баллов.) В комплексном евклидовом пространстве M^n $(n \times n)$-матриц (с комплексными элементами) со скалярным произведением $(x, y) = \operatorname{Tr} xy^*$ задан оператор A умножения на матрицу $a \in M^n$: $Ax = ax$, $x \in M^n$, и оператор B умножения на эрмитово сопряженную матрицу $b = a^*$: $Bx = bx$, $x \in M^n$. Доказать, что $B = A^*$.

Задача 20. (7 баллов.) Пусть E — вещественное евклидово пространство тригонометрических полиномов степени $\leq n$ (т. е., функций вида

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

с вещественными коэффициентами). Скалярное произведение задано формулой

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

Проверить, что оператор

$$A = \frac{d^2}{dt^2}$$

симметричен в E и доказать, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$$

образует ортонормированный собственный базис для оператора A.

Задача 21. (7 баллов.) В вещественном евклидовом пространстве Ω_n полиномов степени $\leq n$, заданных на отрезке $[-1, 1]$, со скалярным произведением

$$(P, Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt,$$

рассматривается оператор A, заданный соотношением

$$(AP)(t) = (t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t).$$

Проверьте, что оператор A симметричен.

Задача 22. (7 баллов.) Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Доказать, что существует такой самосопряженный неотрицательный оператор B, что выполнено $B^2 = A$. Доказать, что B положителен тогда и только тогда, когда A положителен.

Задача 23. (9 баллов.) Пусть A и B — самосопряженные неотрицательные операторы в комплексном евклидовом пространстве E, причем оператор B обратим. Доказать, что собственные значения оператора AB неотрицательны.

Задача 24. (8 баллов.) Пусть ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в комплексном евклидовом пространстве E имеют одинаковую норму: $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$.

Доказать, что существует унитарный оператор U в E, переводящий $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$: $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Задача 25. (10 баллов.) Пусть A — самосопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Доказать следующие свойства:

a) оператор $A - iI$ обратим;

b) оператор $B = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ унитарен;

c) оператор $B - I$ обратим;

d) выполнено тождество $A = i(B - I)^{-1}(B + I)$.

Задача 26. (9 баллов.) Пусть A и B — самосопряженные операторы в комплексном евклидовом пространстве E, причем оператор A положителен. Доказать, что собственные значения оператора AB вещественны, а сам оператор AB диагонализуем.

Задача 27. (8 баллов.) Пусть A — самосопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:

a) $\lambda_j \in [\alpha, \beta]$ для всех собственных значений λ_j оператора A,

b) оператор $A - \lambda I$ отрицателен при $\lambda > \beta$ и положителен при $\lambda < \alpha$.

Задача 28. (8 баллов.) Пусть A и B — самосопряженные положительные операторы в комплексном евклидовом пространстве E, и выполнено $A = BC$, где C — унитарный оператор. Доказать, что $C = I$.

Задача 29. (8 баллов.) Доказать, что в разложении $A = BC$ для линейного оператора A в комплексном евклидовом пространстве E, где B — самосопряженный неотрицательный оператор и C — унитарный оператор (полярное разложение), оператор B определяется однозначно по оператору A. Найдите выражение для оператора B.

Задача 30. (7 баллов.) Для линейного оператора A в комплексном евклидовом пространстве E доказать, что оператор A^*A неотрицателен. При этом A^*A положителен тогда и только тогда, когда A обратим.

Тема 4. Жорданова нормальная форма

Задача 31. (9 баллов.) Пусть A — линейный оператор в комплексном линейном пространстве E. Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ оператор A имеет изображающую матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить жорданову форму этой матрицы и найти жорданов базис, то есть такой базис в E, в котором изображающая матрица оператора A имеет жорданову форму.

Задача 32. (9 баллов.) Пусть A — линейный оператор в комплексном линейном пространстве E. Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ оператор A имеет изображающую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить жорданову форму этой матрицы и найти жорданов базис, то есть такой базис в E, в котором изображающая матрица оператора A имеет жорданову форму.

Образцы решений

Решение задачи 3. Размерность пространства $E = \Omega_n$ многочленов степени не выше n равна $n+1$. Поскольку $\dim E' = \dim E$ (для любого пространства E), то $\dim E' = n + 1$. Пусть $g^0, g^1, \ldots, g^n$ — линейные формы, определенные равенством (1). Тогда для доказательства того, что формы $g^0, g^1, \ldots, g^n$ образуют базис в E', достаточно проверить, что эти формы линейно независимы. Приравняем нулю линейную комбинацию этих форм:

$$\alpha_0 g^0 + \alpha_1 g^1 + \ldots + \alpha_n g^n = 0. \tag{2}$$

Требуется доказать, что

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{3}$$

Пусть

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n$$

— некоторый многочлен степени не выше n. Вычислим значение формы g^k на многочлене P:

$$g^k(P) = \int\limits_0^{k+1} P(x)\,dx = p_0(k+1) + \frac{p_1}{2}(k+1)^2 + \frac{p_2}{3}(k+1)^3 + \ldots + \frac{p_n}{n}(k+1)^{n+1}. \tag{4}$$

Равенство (2) означает, что

$$\alpha_0 g^0(P) + \alpha_1 g^1(P) + \ldots + \alpha_n g^n(P) = 0 \tag{5}$$

для любого многочлена $P \in \Omega_n$. Это равносильно тому, что (5) выполнено для всех базисных многочленов $P_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. В соответствии с (4), имеем

$$g^k(P_j) = \frac{1}{j+1}(k+1)^{j+1}.$$

Соотношение (5) при $P = P_j$ перепишется в виде

$$\frac{1}{j+1}\left(\alpha_0 + \alpha_1 2^{j+1} + \ldots + \alpha_n (n+1)^{j+1}\right) = 0.$$

Перебирая $j = 0, 1, \ldots, n$, получаем, что числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют следующей однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \ldots + (n+1)\alpha_n = 0 \\ \alpha_0 + 2^2\alpha_1 + 3^2\alpha_2 + \ldots + (n+1)^2\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 + 2^n\alpha_1 + 3^n\alpha_2 + \ldots + (n+1)^n\alpha_n = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Определитель матрицы A, составленной из коэффициентов этой системы, есть определитель Вандермонда:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n+1) \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^n & 2^n & 3^n & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix} = \Pi_{j>i}(j-i) \neq 0.$$

(Справа стоит произведение чисел $(j-i)$, причем индексы i, j пробегают значения $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$ и $j > i$. Поскольку $\det A \neq 0$, то система (6) имеет только тривиальное решение. Это доказывает равенства (3).

Решение задачи 4. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3.$$

Приведем ее к сумме квадратов методом выделения полных квадратов. Удобно начать с "конца", т. е. рассмотреть сначала члены, содержащие x_3:

$$\begin{aligned} x_3^2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3 &= (x_3^2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3 + 25x_1^2 + 9x_2^2) - 25x_1^2 - 9x_2^2 \\ &= (x_3 + 5x_1 + 3x_2)^2 - 25x_1^2 - 9x_2^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) = (x_3 + 5x_1 + 3x_2)^2 - 24x_1^2 - 5x_2^2 + 2\lambda x_1 x_2.$$

Далее, преобразуем оставшиеся члены, содержащие x_2:

$$\begin{aligned} -5x_2^2 + 2\lambda x_1 x_2 &= -5\left(x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{\lambda x_1}{5} + \frac{\lambda^2 x_1^2}{25}\right) + \frac{\lambda^2 x_1^2}{5} \\ &= -5\left(x_2 - \frac{\lambda x_1}{5}\right)^2 + \frac{\lambda^2 x_1^2}{5}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q(\mathbf{x}) = (x_3 + 5x_1 + 3x_2)^2 - 5\left(x_2 - \frac{\lambda x_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{5} - 24\right)x_1^2.$$

Перейдем к новым координатам:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - \frac{\lambda x_1}{5} \\ y_3 &= x_3 + 5x_1 + 3x_2 \end{aligned}\right\}$$

В этих координатах выполнено

$$Q(\mathbf{x}) = \left(\frac{\lambda^2}{5} - 24\right) y_1^2 - 5y_2^2 + y_3^2. \tag{7}$$

Обозначим через n_+ количество положительных коэффициентов, через n_- — количество отрицательных коэффициентов и через n_0 — количество нулевых коэффициентов в (7). Тогда при $\lambda^2 > 120$ выполнено $n_+ = 2$, $n_- = 1$, $n_0 = 0$; если $\lambda^2 < 120$, то $n_+ = 1$, $n_- = 2$, $n_0 = 0$. Наконец, если $\lambda^2 = 120$, то $n_+ = n_1 = n_0 = 1$.

В силу закона инерции квадратичных форм, числа n_+, n_- не зависят от того, каким именно способом квадратичная форма была приведена к сумме квадратов. Как известно, $n_0 = n - r$, где n — размерность пространства, а r — ранг квадратичной формы. Число n_0 также не зависит от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Поэтому любой другой способ решения приведет к тому же самому ответу.

Ответ. 1) Если $\lambda < -2\sqrt{30}$ или $\lambda > 2\sqrt{30}$, то $n_+ = 2$, $n_- = 1$, $n_0 = 0$.
2) Если $-2\sqrt{30} < \lambda < 2\sqrt{30}$, то $n_+ = 1$, $n_- = 2$, $n_0 = 0$.
3) Если $\lambda = \pm 2\sqrt{30}$, то $n_+ = n_1 = n_0 = 1$.

Решение задачи 14. Пусть F — подпространство вещественного евклидова пространства E. Пусть $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in E$ и $\mathbf{x} \not\perp F$. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in F$, $\mathbf{z} \in F^\perp$. Отметим, что при сделанных предположениях $\mathbf{y} \neq 0$. Обозначим через φ угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Напомним, что за угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принимается угол φ такой, что $0 \leq \varphi \leq \pi$ и

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Пусть $0 \neq \mathbf{y}' \in F$ и φ' — угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}'$. Тогда

$$\cos\varphi' = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}'\|} = \frac{(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y}')}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}'\|} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y}')}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}'\|} \leq \frac{\|\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{y}'\|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}'\|} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Таким образом,
$$\cos\varphi' \le \cos\varphi.$$
Поскольку функция $\cos t$ монотонно убывает на промежутке $t \in [0, \pi]$, отсюда следует, что $\varphi \le \varphi'$.

Выясним теперь, когда выполняется равенство $\cos\varphi' = \cos\varphi$. В этом случае выполнено
$$\frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y}')}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}'\|} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$
то есть
$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}'\|. \tag{8}$$
Представим вектор $\mathbf{y}'$ в виде
$$\mathbf{y}' = \alpha\mathbf{y} + \mathbf{y}_\perp, \quad \mathbf{y}_\perp \perp \mathbf{y}.$$
Тогда $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \alpha\|\mathbf{y}\|^2$. Поэтому равенство (8) принимает вид
$$\alpha\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|(\alpha^2\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}_\perp\|^2)^{1/2}. \tag{9}$$
Отсюда следует, что
$$\alpha^2\|\mathbf{y}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}_\perp\|^2.$$
Следовательно, $\mathbf{y}_\perp = 0$. Теперь из (9) вытекает, что $\alpha \ge 0$, а поскольку $\mathbf{y}' = \alpha\mathbf{y} \ne 0$, то $\alpha > 0$.

Решение задачи 21. В вещественном евклидовом пространстве Ω_n полиномов степени $\le n$ со скалярным произведением
$$(P, Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt,$$
рассматривается оператор A, заданный соотношением
$$(AP)(t) = (t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t). \tag{10}$$

Заметим, что правую часть в (10) можно переписать в виде

$$(AP)(t) = \frac{d}{dt}((t^2-1)P'(t)).$$

Проверим, что оператор A симметричен. Для этого требуется проверить, что $(AP, Q) = (P, AQ)$ для любых многочленов $P, Q \in \Omega_n$. Имеем:

$$(AP, Q) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dt}((t^2-1)P'(t))\right) Q(t)\, dt.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$(AP, Q) = -\int\limits_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\, dt + (t^2-1)P'(t)Q(t)|_{t=-1}^{t=1}.$$

Подстановка справа обращается в ноль, поскольку функция t^2-1 равна нулю при $t = \pm 1$. В результате получаем:

$$(AP, Q) = -\int\limits_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\, dt. \tag{11}$$

Отметим, что выражение в правой части (11) симметрично относительно P и Q. Если поменять ролями P и Q, то для (AQ, P) получится точно такое же выражение. Следовательно, $(AP, Q) = (AQ, P) = (P, AQ)$. Последнее равенство есть следствие симметричности скалярного произведения. Таким образом, оператор A симметричен.

Решение задачи 26. Поскольку оператор A положителен, то можно определить положительный оператор $A^{1/2}$, квадрат которого равен A. Действительно, по теореме о диагонализации самосопряженного оператора, в пространстве E существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ из собственных векторов оператора A. Тогда

$$A\mathbf{f}_j = \lambda_j \mathbf{f}_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

причем все собственные значения λ_j положительны: $\lambda_j > 0$. Тогда $A^{1/2}$ — оператор с собственными значениями $\sqrt{\lambda_j}$ и собственными векторами $\mathbf{f}_j$, то есть,

$$A^{1/2}\mathbf{f}_j = \sqrt{\lambda_j}\mathbf{f}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нам понадобится также оператор $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Рассмотрим оператор $C = A^{1/2}BA^{1/2}$. Оператор C самосопряжен, что вытекает из самосопряженности операторов $A^{1/2}$ и B. Поэтому все собственные значения оператора C вещественны.

Применим теорему о диагонализации к самосопряженному оператору C. В пространстве E существует ортонормированный базис $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ такой, что

$$C\mathbf{g}_k = \mu_k \mathbf{g}_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

причем числа μ_k вещественны. Применим оператор $A^{1/2}$ к обеим частям равенства (12):

$$A^{1/2}C\mathbf{g}_k = \mu_k A^{1/2}\mathbf{g}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вводя обозначения $A^{1/2}\mathbf{g}_k = \mathbf{h}_k$, и учитывая, что $C = A^{1/2}BA^{1/2}$, получаем

$$AB\mathbf{h}_k = \mu_k \mathbf{h}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Векторы $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$ линейно независимы (это вытекает из линейной независимости набора $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ и из обратимости оператора $A^{1/2}$). Таким образом, в E существует базис из собственных векторов оператора AB. Соответствующие собственные значения совпадают с μ_k, $k = 1, \ldots, n$, и, тем самым, являются вещественными числами.

Комментарий к задачам 28 и 29. При решении этих задач полезно воспользоваться результатом задачи 22.

Литература

1. Т. А. Суслина, *Высшая алгебра. Задачи к коллоквиуму во втором семестре (усиленный поток)*, Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса, СПбГУ, 2007, 18 с.