Dmitri Yafaev

Dossier scientifique

Curriculum Vitae

Formation

Etudes Universitaires :
Début des études universitaires en 1965
Fin de maîtrise et DEA au département de Physique de l'Université de Leningrad en janvier 1971

Thèse (Ph.D.) : "Sur le spectre ponctuel dans le problème quantique à trois corps" (sous la direction de M.Birman) à l'Université de Leningrad en 1973

Thèse d'Etat (Habilitation) : "Les effets spectraux au début du spectre continu et la théorie de la diffusion" à l'Institut de Mathématiques de l'Academie des Sciences de U.R.S.S. (LOMI) en 1982

Prix de la recherche de l'Université de Leningrad en janvier 1975

Expérience professionnelle

Emplois en Russie :
Maître de Conférences à l'Université de Leningrad : 1973-1977
Chargé de Recherche à l'Institut de Mathématiques de l'Academie des Sciences de U.R.S.S. (LOMI) : 1977-1981
Directeur de recherche de deuxième/première classe à l'Institut de Mathématiques de l'Academie des Sciences de U.R.S.S. (LOMI) : 1981-1990
en supplément : un quart de service de professeur à l'Université de Leningrad.

Emploi temporaire du 1er octobre 1990 au 1er octobre 1992 :
Professeur associé de première classe à l'Université de Nantes

Emploi actuel depuis le 1er octobre 1992 :
Professeur (de première classe depuis le 1er octobre 1995, de classe exceptionnelle, 1er échelon depuis le 1er octobre 2002, 2eme échelon depuis le 1er septembre 2005) à l'Université de Rennes

L'organisation de la recherche

Membre du comité de la rédaction de la revue "Journal of spectral theory".

Membre du comité de la rédaction du journal "Integral equations and operator theory".

Membre du comité de la rédaction du journal "Journal of mathematical physics".

Membre du comité de la rédaction de la revue "Problems of mathematical analysis" publié par Springer.

Membre du comité de la rédaction de la revue "Functional analysis and its applications".

Un des éditeurs de volume "Differential operators and spectral theory", Advances in the mathematical sciences, v. 189, AMS, 1999.

Un des éditeurs de volume "Spectral theory of differential operators", Advances in the mathematical sciences, v. 225, AMS, 2008.

Membre du comité pour les prix européens aux jeunes mathématiciens (décernés au congrès européen, Stockholm, 2004).

Un des organisateurs des colloques traditionnels sur la théorie spectrale, l'institut international d'Euler, Saint-Petersbourg, Russie

Communications dans des séminaires et congrès

Parmi les conférences données sur invitation on peut distinguer :
les Congrès Internationaux en Physique Mathématique : Berlin, 1981 et Swansea, 1988,
le Congrès International en Mathématique, Berlin, 1998, la section "équations aux dérivées partielles",

ainsi que les conférences récentes :

France : Marseille (Luminy), 1995, 1997, 2003, 2007, 2015; Lille, 1997; Ecole Polytechnique 1994, 1996; Nantes 1999, 2005, 2006.

Allemagne : Oberwolfach 1995, 2001, 2004; Holzhau, 1994; Clausthal, 1995, 1998; l'Université technique (Berlin), 1998; Bochum, 1998; Potzdam, 1999; Erlangen, 2010; Mainz, 2012.

Australie : Congrès International en Physique Mathématique, 1997; un cours sur la théorie de diffusion au centre mathématique, Canberra, 2001

Autriche : Vienne 1993, 2001, 2011 (les colloques internationaux à l'Institut Schrödinger).

Canada : Vancouver 1993 (le cours à l'école d'été), Toronto 1997 (le colloque international à l'Institut Fields)

Chili : une conférence plénière au colloque satellite du Congrès International en Physique Mathématique en 2006

Danemark : 1991, 1997 (les colloques internationaux) et 2003.

Etats-Unis : Boston (North Eastern Univ.) 2004, Courant Institute 1995, 2004; Caltech 1991, 1994; Atlanta (Georgia Tech.) 2004, Minneapolis (le colloque international) 1995, Stony Brook 1995, Berkley 1999, 2004, Indianapolis 2011, Michigan 2011, Missouri 2011, Miami 2013.

Grande-Bretagne : Londres 2002, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, Bristol 2012, 2015, Edimbourg 2002, Durham 2005, Cambridge 2006, 2015.

Inde : le colloque international (l'Inde - les Etats-Unis) en théorie spectrale, 2000.

Israël : Jérusalem et Weizmann Institut, 2000, les colloques internationaux 2006 et 2007.

Italie : colloque international "Méthodes semiclassiques", 1999, Bologne 2010, 2011, 2012, 2015, Rome 2013, 2014, Naple 2014.

Japon : Kyoto 1992 (Taniguchi Symposium), Symposium sur la théorie spectrale à RIMS, Kyoto, 2001, Symposium sur la théorie spectrale à Université de Tokyo, 2009, 2011.

Malaysie : colloque "Nouvelles frontières en mécanique quantique", 1997.

Mexique (Mexico) : un cours sur la théorie de diffusion par les champs magnétiques, 2004.

Portugal : Congrès International en Physique Mathématique, 2003; colloque sur la propagation des ondes, Aveiro 2012.

Pologne : les colloques internationaux en théorie spectrale, 2011, 2015.

République Tchéque : colloque international "Méthodes mathématiques en mécanique quantique", 1998.

Roumanie : 2003 (plusieurs colloques internationaux).

Russie : Saint-Petersbourg, les colloques internationaux en théorie spectrale, 1993, 2002, 2009, 2010, 2013 et le seminaire en EDP : 1994 - 2014; Moscou (le colloque international en EDP) 1996.

Suède (les colloques internationaux en analyse) : Linköping 1996, 2015; Stockholm 1998, 2004; Lund 1999; Institut Mittag-Leffler 2002.

Suisse : Ascona (le colloque international en théorie spectrale) 1996, Zürich 2003.

Activités d'enseignement

En Russie, les cours :
Théorie de la diffusion,
Théorie spectrale des opérateurs différentiels,
Applications différentiables.

En France, les cours :
Méthodes mathématiques (DEUG)
Analyse avancée (Licence)
Calcul différentiel (Licence)
Équations aux dérivées partielles (Maîtrise)
Méthodes mathématiques (Master de mécanique)

Cours de DEA :
Théorie des opérateurs dans l'espace de Hilbert,
Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger,
Théorie spectrale des opérateurs différentiels.

Formation doctorale

1. A.V.Sobolev a soutenu sa thèse à LOMI, Leningrad, en 1987. Actuellement il est professeur du UCL en Angleterre, Londre.

2. La thèse de Ph. Morvan est consacrée à la formulation et justification de l'approche quasi-stationnaire du problème de diffusion pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel périodique en temps. Pour ce problème il n'y pas de lois de conservation de l'énergie qui cependant peut se changer seulement par un nombre entier (si la période est égale à 2π). Par consequent, le rôle d'une seule équation de Schrödinger stationnaire pour les interactions ne dépendant pas du temps est joué par un système de nombre infini des équations couplées entre elles. En termes de ce système on peut décrire mathématiquement l'interaction d'une onde plane de l'énergie E qui interagit avec un potentiel et se transforme en ensemble des ondes sphériques de l'énergie $E + n$. Une de difficultés majeures de ce problème était le théorème d'existence et unicité pour des solutions de ce système. Ph. Morvan a soutenu sa thèse "Théorie de la diffusion pour des Hamiltoniens dépendant périodiquement du temps" au decembre 1998.

3. Dans sa thèse Y. Gatel abordait deux problèmes de la théorie de diffusion pour des potentiels à longue portée. Le premier problème consiste en description exhaustive de toutes les solution de l'équation de Schrödinger homogène. On a montré qu'une solution satisfaisante une estimation a priori naturelle à l'infini est asymptotiquement égale à une somme des ondes entrantes et sortantes. Les coefficients de ces ondes sont liés par la matrice de diffusion.

Le cas de systèmes ne pose pas de difficultés majeures pour des potentiels à courtée portée. En révanche, pour des potentiels à longue portée les généralisations des equations d'eiconale pour la phase et de transport pour l'amplitude d'une solution approchée sont couplées entre elles. En général, ça pose des problèmes très difficiles. C'est d'autant plus interessant que pour le système de Dirac on peut trouver une équation (probablement nouvelle) pour la phase ayant la même structure que l'equation d'eiconale pour le cas de l'équation de Schrödinger. Du point de vue analytique, la démonstration de l'existence et de la complétude des opérateurs d'onde se base sur le principe d'absorption limite et les estimations de radiation. Y. Gatel a soutenu sa thèse "Théorie de diffusion pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac avec des potentiels à longue portée" au decembre 1999.

4. Dans une direction assez proche travaillait aussi un autre thésard Ph. Roux. Le but principal était de démontrer l'existence et la complétude des opérateurs d'ondes et d'étudier la matrice de diffusion pour des potentiels à longue portée decroissants plus lentement que $|x|^{-1/2}$ à l'infini. Ça pose beaucoup de problèmes nouveaux comparé aux potentiels décroissants plus vite que $|x|^{-1/2}$. La technique utilisée se base sur les résultats analytique

de la théorie de diffusion (le principe d'absorption limite et les estimations de propagation). On utilise aussi les méthodes de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels en termes lesquelles les objets principaux de la théorie s'expriment. La difficulté nouvelle majeure est que ces opérateurs n'appartiennent qu'aux très mauvaises classes de Hörmander où le calcul standard ne marche pas.

En particulier, l'approche proposée permet d'étudier la matrice de diffusion pour les champs magnétiques. La particularité de diffusion magnétique est que en dimension deux un potentiel magnétique est décroissant comme $|x|^{-1}$ à l'infini même si le champ a un support compact. Donc l'étude des potentiels à longue portée devient inévitable. On a trouvé, en particulier, la singularité diagonale de la matrice de diffusion. Ça jette une lumière nouvelle sur l'interprétation mathématique de l'effet Aharonov-Bohm.

Ph. Roux a soutenu sa thèse "La matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique à longue portée" au decembre 2001.

Vita

Date et lieu de naissance : 02. 01. 1948 à Oufa (U.R.S.S.)

Nationalité : française

Situation de famille : marié

Adresse actuelle : 6 Allée Edith Piaf, 35235 Thorigné-Fouillard

Résumé des travaux

La physique quantique a nécessité et stimulé la création de plusieurs domaines des mathématiques, notamment la théorie spectrale des opérateurs différentiels. En effet, un système quantique est décrit par un opérateur différentiel du second ordre, l'opérateur de Schrödinger, qui joue le rôle d'Hamiltonien d'un système quantique. Son spectre discret correspond aux états liés du système et le spectre continu aux états de diffusion. Actuellement, la théorie des opérateurs de ce type est assez bien comprise pour les systèmes à deux corps avec des potentiels à courtée portée. En revanche, les théorie des systèmes à N, $N > 2$, corps ainsi bien que des systèmes à deux corps avec des potentiels à longue portée posent toujours des problèmes très intéressants et difficiles.

Mes travaux sont consacrés aux différents domaines de la théorie spectrale des opérateurs différentiels. On peut partager mes travaux les plus importants en onze groupes :

I. La théorie spectrale et la théorie de la diffusion dans le cadre abstrait et pour des opérateurs différentiels avec des perturbations à courte portée

II. La théorie du spectre discret des Hamiltoniens à plusieurs corps

III. La théorie de la diffusion pour les Hamiltoniens dépendant du temps

IV. Les asymptotiques spectrales à basse énergie

V. Les asymptotiques semi-classiques de la section efficace totale et d'autres quantités spectrales

VI. Propriétés spectrales de la matrice de diffusion

VII. La théorie de la diffusion des Hamiltoniens à plusieurs corps

VIII. Les opérateurs pseudo-différentiels

IX. La théorie de la diffusion pour les systèmes quantiques avec des potentiels à longue portée

X. L'asymptotique de la matrice de diffusion à haute énergie

XI. L'effet Aharonov-Bohm à longue portée

XII. Le champ magnétique de Biot-Savart-Laplace

XIII. La théorie spectrale des fonctions non-continues des opérateurs auto-adjoints

XIV. La théorie des opérateurs de Hankel et les problèmes des moments

XV. La théorie spectrale des opérateurs de Hankel et la théorie de l'approximation

XVI. La théorie de diffusion des opérateurs de Hankel

I. La théorie spectrale et la théorie de la diffusion dans le cadre abstrait et pour des opérateurs différentiels avec des perturbations à courte portée.

1. Les papier [1, 2, 6, 99, 100, 105, 119, 120] portent sur la théorie spectrale.

Ici on ne mentionne que l'étude récente d'une perturbation de l'opérateur de multiplication par un opérateur integral de Fourier. Ce modèle s'avère assez curieux de point de vue technique ainsi bien que de résultats obtenus. En particulier, la méthode de perturbations lisses ne s'applique pas pour la démonstration de l'existence et complétude des opérateurs d'ondes bien que l'Hamiltonien libre est tout à fait explicit. Néanmoins on arrive à ces résultats en utilisant la technique de perturbations à trace. Le spectre discret est très sensible aux pétites perturbations de données du problème. Par exemple, il peut etre fini ou infini en fonction de constante du couplage.

La technique developpée pour l'étude du modèle de Friedrichs singulier a permis de démontrer [102] les inégalités (du type de Hardy - Rellich)

$$\int_{\mathbf{R}^d} |x|^{-2l}|u(x)|^2 dx \leq C_l \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2l}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

d'ordre l arbitraire (pas nécessairement entier) et trouver les constantes C_l précises.

2. Dans les papier [52, 56] on developpe dans le cadre abstrait la théorie de la diffusion pour les opérateurs agissant dans deux espaces differents. Parmi les résultats divers [7, 13 - 15, 21, 24, 27, 35, 70, 121] sur les opérateurs différentiels avec des perturbations à courte portée on mentionne l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel a une décroissance anysotrope à l'infini. La démonstration de la complétude des opérateurs d'onde pour les potentiels anysotropes a permis de trouver un nouveau type des théorèmes de trace (du type de Sobolev).

3. Les papiers [3, 28, 119, 120] sont consacrés aux formules de trace. Par, exemple, dans [3] on a trouvé une généralisation de la formule de Levinson pour les particules quantique avec les potentiels coulombiens.

Dans [119, 120] on developpe la théorie de la shift spectrale pour le cas où seulement la difference des puissances des résolvantes de deux opérateurs auto-adjoints appartient à la classe de trace. Cette généralisation est necessaire pour les nombreuses applications, en particulier, à l'opérateur de Dirac.

II. La théorie du spectre discret des Hamiltoniens à plusieurs corps. Les travaux [4, 5, 8, 10, 11, 12, 18] de ce groupe traitent le problème de la finitude ou de l'infinitude du nombre des états liés pour les Hamiltoniens H de trois (et N) particules quantiques. Pour l'Hamiltonien de deux particules la réponse est bien connue: le spectre discret est fini si le potentiel décroît plus vite que $|x|^{-2}$ à l'infini; par contre, si le potentiel est négatif et la décroissance est moins rapide que $|x|^{-2}$, alors le spectre discret est infini. Pour le problème à trois corps la situation est beaucoup plus riche. On a montré que la finitude du spectre discret est déterminée non seulement par la décroissance des potentiels mais aussi par la stabilité (l'existence des états liés) des sous-systèmes à deux corps. D'autre part, le spectre discret peut être fini même pour des potentiels à longue portée grâce à "la compensation des charges".

Dans les articles du groupe I, des résultats fondamentaux sur le spectre discret dans un système à trois corps ont été obtenus :

1. La finitude du nombre des états liés de l'opérateur H avec des potentiels à courte portée sous l'hypothèse qu'au moins un sous-système à deux particules possède un état lié.

2. La finitude du nombre des états liés de l'Hamiltonien de l'ion hydrogène. Dans ce cas-là, le spectre discret est fini bien que les potentiels soient coulombiens.

3. La théorie du spectre discret des systèmes à trois corps avec des potentiels à courte portée sans sous-systèmes stables. On a montré que, dans ce cas-là, la finitude ou

l'infinitude du spectre discret d'Hamiltonien H est determinée par le nombre des états résonnants à l'énergie zero des sous-systèmes à deux corps. La notion d'un tel état a été introduite et étudiée dans l'article [9] du groupe III.

a. Il arrive que le spectre discret de H soit fini si les sous-systèmes n'ont pas d'états résonnants ou un sous-système au plus a un tel état.

b. Si deux ou trois sous-systèmes ont des états résonnants, alors l'opérateur H a un nombre infini des valeurs propres. Ce phénomène (l'effet d'Efimov) était vivement discuté à l'époque dans la littérature physique quoique son sens mathématique n'était pas clair alors.

En somme, les résultats 1 - 3 donnent une réponse exhaustive quant au nombre d'états liés dans le problème à trois corps. Les résultats 1 et 2 ont été généralisés aux systèmes quantiques avec un nombre arbitraire de corps. En particulier, la finitude du spectre discret a été établie pour les ions négatifs avec la charge -1.

Le problème du spectre discret pour les systèmes atomiques était très discuté au début des années 1970 quand les articles de ce groupe furent écrits. Depuis, beaucoup de chercheurs ont travaillé dans ce domaine par les méthodes proposées dans les articles cités ainsi que par des méthodes nouvelles. Par conséquent, plusieurs résultats décrits sur ce sujet admettent maintenant des approches différentes. Malgré tout, beaucoup de résultats (par exemple, sur l'absence des points négatifs d'accumulation des valeurs propres même plongées dans le spectre continu) n'ont pas été récuperés par des méthodes différentes.

III. La théorie de la diffusion pour les Hamiltoniens dépendant du temps. Dans les travaux [19, 22, 23, 25, 29, 36, 37, 40 - 43, 45, 46] on étudie le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger $i\partial u/\partial t = H(t)u$ pour les Hamiltnoniens $H(t)$ dépendant du temps t. L'énergie n'est pas conservée pour les problèmes de ce type et, par conséquent, on ne peut pas donner la description complète des asymptotiques possibles (autrement dit, formuler la complétude asymptotique) en termes spectraux. Pratiquement, on ne considérait que les Hamiltnoniens $H(t) = H_0 + V(t)$ avec les perturbations $V(t)$ négligeables pour t grand. Dans ce cas-là, toutes les solutions de l'équation de Schrödinger ont le comportement libre et l'opérateur d'onde est unitaire.

L'observation initiale de nos études était la suivante. Supposons que nous ayons un puits de potentiel en dimension 1 de profondeur $a(t)$ tendant vers zéro comme $a_0 t^{-\gamma}$ pour $t \to \infty$. Si $\gamma > 1/2$, alors le puits ne peut pas pièger la particule. Par contre, si $\gamma < 1/2$, il existe un état quasi-lié dans ce puits évanescent qui joue le rôle d'état lié du problème stationnaire. Formulé mathématiquement, l'état quasi-lié est une solution de l'équation de Schrödinger qui pour t grand s'approche d'une fonction propre du Hamiltonien $H(t)$. L'existence d'un état quasi-lié contredit l'unitarité de l'opérateur d'onde.

Parmi les résultats obtenus pour les Hamiltoniens dépendant du temps, on peut distinguer les deux résultats suivants.

1. La classification complète des états pour les potentiels ponctuels (en dimension 3). En particulier, on a vérifié que toutes les solutions de l'équation de Schrödinger soit ont l'asymptotique libre, soit correspondent à l'état quasi-lié. Cela a demandé le développement de la théorie asymptotique des équations intégrales du type Volterra. Dans certain sens, cette théorie est analogue à la célèbre théorie de Green et Liouville pour les équations différentielles.

2. La formulation de la complétude asymptotique pour les perturbations dépendant arbitrairement du temps. L'hypothèse qui remplace la formulation spectrale de la complétude asymptotique pour les perturbations stationnaire est la suivante. Si une solution de l'équation de Schrödinger est localement décroissante en t, alors nécessairement elle a l'asymptotique libre. Cette formulation était justifiée pour les grandes dimensions $d, d > 4$, de l'espace. D'autre part, l'existence des états quasi-liés pour $d \leq 4$ montrent que la condition $d > 4$ est nécessaire.

IV. Les asymptotiques spectrales à basse énergie. Les articles [9, 30, 33, 38, 39] sur ce sujet se basent sur l'observation que le comportement à basse énergie des différentes quantités spectrales pour l'opérateur de Schrödinger H à deux corps est déterminé par la vitesse de la décroissance du potentiel à l'infini. La vitesse critique est $|x|^{-2}$. Le cas où le potentiel est décroissant plus vite que $|x|^{-2}$ était assez bien étudié (au moins au niveau physique). Quand même l'étude du spectre discret d'un Hamiltonien à trois corps a demandé d'analyser le cas singulier quand l'opérateur H a une valeur propre proche du point 0. Plus exactement, dans le papier [9] on a introduit la notion d'état résonnant au bord du spectre continu. Le résultat principal de ce papier est la description de la singularité de la résolvante au point zero dans cette situation. Ceci a permis de développer la théorie mathématique de l'effet d'Efimov pour Hamiltoniens à trois corps.

Je me suis concentré surtout sur la décroissance plus lente que $|x|^{-2}$. Dans cette situation, plusieurs effets nouveaux ont été découverts. Il est arrivé que l'asymptotique de densité d'états du spectre continu dépende crucialement du signe du potentiel. Pour des potentiels positifs cette fonction décroît exponentiellement. Donc le bord entre le spectre continu et les point régulier disparaît. On peut dire que le point zéro devient quasi-régulier. Cela implique, par exemple, que le semigroupe $\exp(-Ht)$ décroît localement plus vite que toute puissance de t^{-1}. Par contre, pour les potentiels négatifs, la densité d'états du spectre continu a toujours une singularité. Par conséquent, il y a un état résonnant au début du spectre continu. Cet état a la même nature que pour les potentiels à courte portée mais dans la situation considerée, l'état résonnant est stable (il ne disparaît pas pour des petites perturbations).

Pour des potentiels décroissant moins vite que $|x|^{-2}$, l'asymptotique de la matrice de la diffusion devient oscillante (quel que soit le signe du potentiel). Apparemment les formules obtenues étaient nouvelles, méme pour la littérature physique. Les résultats de ce groupe ont été développés plus tard par les mathématiciens (par exemple, par S. Nakamura) ainsi bien que par les physiciens.

V. Les asymptotiques semi-classiques de la section efficace totale et d'autres quantités spectrales. Le but des articles [47-49, 51, 53-55, 57, 59-62] de ce groupe était d'obtenir la formule asymptotique générale pour la section efficace totale dans le cas des potentiels décroissants comme une fonction homogène à l'infini. On établit une représentation uniforme de la section efficace totale par rapport à deux paramètres : énergie et constante de couplage variant dans une vaste région du plan. En particulier, le cas où la constante de Planck tend vers zéro est toujours couvert. Il est arrivé que l'asymptotique de la section efficace totale dans la région semi-classique est déterminée seulement par le comportement du potentiel à l'infini. La démonstration de la formule asymptotique pour la section efficace totale ainsi que pour l'amplitude de diffusion en avant se base sur l'approximation eiconale qui est aussi justifiée dans les articles de cette catégorie.

Les travaux [63, 64, 69] écrits avec mon élève A. V. Sobolev sont assez proches de ce sujet. Dans ces travaux des estimations universelles de la section efficace totale ont été obtenues. La circonstance remarquable est que la section efficace totale est estimée explicitement en termes du potentiel. Aucune information sur la résolvante n'intervient dans la réponse.

VI. Propriétés spectrales de la matrice de diffusion. Dans les articles [26, 31, 34, 66, 68, 71, 73, 75, 87] de cette catégorie écrits partiellement avec M. Sh. Birman on étudie la distribution des valeurs propres de la matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger. La matrice de diffusion est un opérateur unitaire et pour le problème à deux corps son spectre est constitué de valeurs propres qui ne s'accumulent qu'au point 1 du cercle unité. Dans un certain sens les valeurs propres de la matrice de diffusion jouent sur le spectre continu le rôle des valeurs propres du Hamiltonien sur le spectre discret. En particulier, le caractère d'accumulation des valeurs propres de la matrice de diffusion contient l'information sur le signe du potentiel [75] et sur son comportement à l'infini.

Le but principal était de trouver la distribution asymptotique du spectre de la matrice de diffusion. Pour les potentiels décroissants comme une fonction homogène on a trouvé l'asymptotique des valeurs propres en termes de l'asymptotique du potentiel à l'infini. La formule obtenue pour le spectre discret de la matrice de diffusion a la même nature semi-classique que la formule de Weyl pour les valeurs propres du Hamiltonien. En fait, l'asymptotique du spectre discret de la matrice de diffusion est liée au comportement semi-classique de la section efficace totale et les articles [26, 31, 34] ont motivé la recherche du groupe IV.

Le sens physique des valeurs propres de la matrice de diffusion a été clarifié dans [73] où leur définition en terme des solutions de l'équation de Schrödinger différentielle a été établie.

Dans l'article [87], on a généralisé les résultats de [26, 31, 34] sur le cas où l'opérateur de Schrödinger contient un potentiel périodique.

VII. La théorie de la diffusion des Hamiltoniens à plusieurs corps. Dans les travaux [16, 17, 44, 74, 76, 78, 79, 82-84, 86, 88, 89] la partie continue du spectre d'Hamiltonien H à N corps est étudiée. La structure du spectre continu est intimement liée à l'évolution du système pour des temps grands. L'hypothèse physique fondamentale est qu'asymptotiquement un système des particules se sépare en ses sous-systèmes. Chaque sous-système se trouve dans un état lié et les sous-systèmes différents n'interagissent pas entre eux. Formulée mathématiquement, cette affirmation s'appelle la complétude asymptotique. Elle donne la classification complète des états de diffusion pour des systèmes à N corps.

1. Dans les articles [74, 82], on donne une démonstration élementaire de la complétude asymptotique. L'ingrédient analytique est l'estimation nouvelle pour le groupe unitaire (ou la résolvante) de H qui complète le principe d'absorption limite dans le problème à N corps. Ceci donne une généralisation non-triviale des estimations de radiation qui sont bien

connues dans le problème à 2 corps. L'approche proposée permet de plonger la théorie de la diffusion pour N corps dans le cadre standard des perturbations lisses. La circonstance remarquable est que le cas de N arbitraire est traité tout à fait de la même manière que le cas $N = 3$. Cela est devenu possible grace à la compréhension de la géometrie intrinsèque du problème.

Cette approche du problème à N corps a été exposée dans différents colloques [76, 78, 79]. Elle a été utilisée pour résoudre d'autres problèmes de la théorie. Par exemple, on peut mentionner la démonstration de Derezinski de la completude asymptotique pour des potentiels à longue portée.

Un des avantages de l'approche proposée est qu'elle est compatible avec les deux formulations de la théorie de la diffusion: dépendant du temps et stationnaire. En particulier, notre méthode donne automatiquement les representations stationnaires pour les opérateurs d'ondes (ceci revient au théorème du développement en fonctions propres), la matrice de la diffusion etc [83, 85, 89]. Cela ouvre la voie vers l'étude approfondie de la matrice de la diffusion qui est très importante pour la physique.

2. Dans les exposés [86, 89, 93] et l'article [91] on montre que pour les systèmes à trois corps avec des potentiels décroissants à l'infini moins vite que $|x|^{-1/2}$, il existe des canaux de diffusion qui jouent un rôle intermédiaire entre les canaux où toutes les particules sont asymptotiquement libres et des canaux de diffusion sur les états liés de deux particules. L'existence de tels canaux contredit la complétude asymptotique dans le sens canonique. L'effet découvert est nouveau aussi bien pour la physique que pour les mathématiques. Donc le tableau physique de la diffusion décrit ci-dessus devient faux pour des potentiels décroissant moins vite que la puissance critique.

Le phénomène similaire est mis en evidence [20, 92] aussi pour les systèmes à deux corps avec des potentiels à longue portée si la condition traditionnelle sur ses dérivées est violée.

VIII. Les opérateurs pseudo-différentiels. L'étude approfondie de la matrice de diffusion révèle que il est souvent nécessaire de la traiter comme un opérateur pseudo-différentiel. En fait, la matrice de diffusion apparaît naturellement comme la restriction d'un opérateur pseudo-différentiel sur une surface (la sphère, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger). Pour les potentiels à courtée portée cette situation est bien décrite par les théorèmes classiques de trace de Sobolev. En revanche, pour les potentiels à N, $N > 2$, corps ainsi bien que pour les potentiels à longue portée des problèmes nouveaux se posent. Cela a servi de motivation pour étudier avec N. Lerner dans [90, 95] le problème de restriction dans le cadre assez général. On a trouvé les conditions suffisantes et nécessaires pour qu'un opérateur pseudo-différentiel de l'ordre arbitraire ait la restriction sur une surface. Ceci a demandé l'introduction des invariants (par rapport aux difféomorphismes) nouveaux liés à un opérateur pseudo-différentiel et une surface.

En plus, la théorie spectrale de la matrice de diffusion a demandé l'étude [104] d'une classe des opérateurs pseudo-différentiels avec des symbols oscillants. Si un potentiel de l'opérateur de Schrödinger decroît plus vite que $|x|^{-1/2}$ à l'infini, cette classe des opérateurs pseudo-différentiels se ramène aux classes tradionnelles de Hörmander. Dans le cas contraire on obtient une classe nouvelle qui demande une étude spéciale. En particulier, on a trouvé les conditions pour que le spectre essentiel d'un opérateur pseudo-différentiel avec un symbol oscillant coïncide avec le cercle unité.

IX. La théorie de la diffusion pour les systèmes quantiques avec des potentiels à longue portée. La technique développée auparavant (en particulier, dans [82]) pour le problème à N corps s'avérait très utile pour le problème à deux corps avec des potentiels à longue portée. Ainsi la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes et les représentations stationnaires pour la matrice de diffusion sont les consequences directes du principe d'absorption limite et des estimations de radiation. On procède ici de la définition des opérateurs d'ondes avec une "identification" mais finalement on montre que ces opérateurs coïncident avec des opérateurs d'ondes définis via une modification de l'évolution libre en représentation de coordonnées (une telle définition a été proposée dans [24]). Cette approche est particulièrement utile pour l'étude de la matrice de diffusion.

Le but de l'article [96] est d'étudier les propriétés spectrales de la matrice de diffusion et la singularité diagonale de son noyau (l'amplitude de diffusion). On démontre que le spectre de la matrice de diffusion couvre le cercle unité (ceci est un effet nouveau qui distingue le problème à longue portée de celui à courtée portée). La représentation asymptotique pour la singularité diagonale de l'amplitude de diffusion généralise la formule célèbrée de Gordon et Mott pour le potentiel coulombien. On montre aussi dans [94] que pour les potentiels coulombiens les section efficace classique et quantique coïncident dans la dimension trois seulement. C'est exactement cette coïncidence qui a permis à Rutherford de decouvrir la structure fine d'un noyau atomique.

On supposait dans [96] qu'un potentiel, bien que à longue portée, decroît plus vite que $|x|^{-1/2}$ à l'infini. Si un potentiel décroît plus lentement, le problème devient beaucoup plus compliqué. Ici les résultats du groupe VIII sur les opérateurs pseudo-différentiels avec symbols oscillants deviennent crucials. En particulier, ils sont utilisés pour démontrer que le spectre de la matrice de diffusion couvre le cercle unité pour tous potentiels électrique et magnétique decroissant à l'infini moins vite que $|x|^{-1}$. Le cas général est entré dans le papier [115] écrit avec mon élève Ph. Roux.

La technique développée pour l'opérateur de Schrödinger s'avérait très utile pour le système de Dirac. La différence principale de l'opérateur de Schrödinger est le caractère matriciel du problème, et la difficulté majeure était d'obtenir les équations d'eiconale et de transport. Apparemment ces équations n'étaient pas connues auparavant. Les résultats sur le système de Dirac ont été obtenus dans le papier [106] commun avec mon élève Y. Gâtel.

X. L'asymptotique de la matrice de diffusion à haute énergie. Dans les papiers [109], [110] et [113] on a trouvé une expression explicite de l'amplitude de diffusion qui donne un développement asymptotique complète (avec une erreur arbitrairement petite) pour les hautes énergies. En plus, la même expression donne une description (aussi complète) de la singularité diagonale de l'amplitude de diffusion en variables angulaires. La formule obtenue est, dans certain sens, universelle car elle s'applique aux potentiels électriques et magnétiques, a courtée aussi bien que à longue portée.

Ces résultats permettent de résoudre le problème inverse de reconstitution de comportement asymptotique d'un potentiel étant données les singularités de l'amplitude de diffusion pour une seule énergie (les papiers [120] et [126]).

XI. L'effet Aharonov-Bohm à longue portée L'approche proposée dans [96] permet aussi d'étudier la matrice de diffusion pour les potentiels magnétique décroissants comme $|x|^{-1}$ à l'infini. Dans ce cas critique mais très important pour la physique, le spectre de la matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en dimension 2 consiste de deux intervalles fermés et peut se dégénérer en deux valeurs propres de multiplicité infinie. Ça révèle la nature à longue portée de l'effet Aharonov-Bohm. Ces résultats ont été obtenus dans le papier [111] écrit avec Ph. Roux. La théorie générale pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiels magnétique en dimension arbitraire a été construite dans les papiers [116, 123] où un lien avec la topologie de l'espace a été établi.

XII. Le champ magnétique de Biot-Savart-Laplace. Un important potentiel magnétique qui vient directement de la physique est le potentiel (de Biot-Savart-Laplace) d'un courant électrique rectiligne et infini. Dans ce cas-là le potentiel est une fonction logarithmique et donc croissante à l'infini (dans la direction orthogonale au courant). Il arrive [114, 118] que l'analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger H avec un tel potentiel peut être effectué presque explicitement. On démontre que le spectre de H est absolument continu et coincide avec demi-axe positif. Le plus interessant est qu'une solution $\exp(-iHt)f$ de l'équation de Schrödinger dépendant du temps se propage toujours dans la direction du courant si la charge d'une particule est positive et dans la direction opposée si la charge est négative. En fait, le même phenomen a lieu en physique classique. Bien que le mouvement d'une particule est assez compliqué, il y toujours une dérive dans le sens du courant (contre courant) dans le cas de la charge positive (négative).

L'exemple du champ magnétique de Biot-Savart-Laplace complète deux exemples importants connus depuis longtemps : le champ homogène et le champ d'un solénoïde. Les mouvements des particules dans ces trois champs possèdent les propriétes très différentes.

XIII. La théorie spectrale des fonctions non-continues des opérateurs auto-adjoints. On travaille sur ce sujet avec A. Pushnitski (King's College, Londre). Considerons les opérateurs auto-adjoints H_0, H satisfaisants les hypothèses standardes de la théorie de diffusion lisse. Nous avons trouvé une description explicite du spectre absolument continu de l'opérateur $D_\theta = \theta(H) - \theta(H_0)$ pour les fonctions θ continues par morceaux. Cette description contient la matrice de diffusion pour la paire H_0, H calculée aux sauts de continuité de θ. Nous avons aussi démontré que l'opérateur D_θ n'a pas du spectre singulièrement continu et que ses valeurs propres ne s'accumulent que vers les seuils dans le spectre de D_θ. Notre approche se base sur la construction de l'opérateur "model" pour chaque saut de θ. Ces opérateurs "model" sont définis comme les opérateurs de Hankel symmetrisés et ils admettent l'analyse spectrale explicite. Nous développons la théorie de diffusion aux plusieurs canaux pour l'opérateur D_θ. Ça nous amène aussi à la théorie de diffusion pour les opérateurs de Hankel dont les symboles ont des sauts de continuité. Les résultats de ce cycle sont puliés dans les papiers [132,139,141].

XIV. La théorie des opérateurs de Hankel et les problèmes des moments. Les opérateurs de Hankel H peuvent être définis comme les opérateurs intégraux dans l'espace $L^2(\mathbf{R}_+)$ dont les noyaux h ne dépendent que de la somme des variables. On montre dans [143, 148] que chaque opérateur de Hankel H peut être quasi-diagonalisé : $H = L^*\Sigma L$ où L est la transformation de Laplace et Σ est l'opérateur de multiplication par une fonction $\sigma(\lambda)$. La sigma-fonction contient l'information importante sur les propriétes spectrales de l'opérateur H. Par exemple, les opérateurs H et Σ ont les mêmes nombres des valeurs propres positives et négatives et, en particulier, les conditions $\pm H \geq 0$ et $\pm\Sigma \geq 0$ sont équivalentes. On établit une à une correspondance (dans les espaces des distributions) entre les noyaux $h(t)$ des opérateurs de Hankel et ses sigma-fonctions $\sigma(\lambda)$. Cela donne la représentation intégrale des fonctions $h(t)$ géneralisante la représentation de Bernstein des fonctions exponentiellement convexes.

Les conditions obtenués pour que $H \geq 0$ sont assez explicites. Elles s'appliquent aux classes très différentes des opérateurs de Hankel. Comme exemple, on peut mentionner la formule [144] pour le nombre des valeurs propres positives et negatives d'un opérateur de Hankel de rang fini et la théorie spectrale [142, 142] des opérateurs généralisés de Carleman dont le spectre est essentiellement absolument continu.

XV. La théorie spectrale des opérateurs de Hankel et la théorie de l'approximation. L'identité $H = L^*\Sigma L$ montre que chaque opérateur de Hankel est unitairement équivalent à un opérateur pseodo-différentiel d'une structure très spéciale ce qui amene à une quasi-diagonalization des opérateurs de Hankel. Çela ouvre une approche nouvelle à la théorie spectrale des opérateurs de Hankel. Pour les opérateurs compactes cette idée a été réalisée dans la série des papiers [146, 147, 50, 51] avec A. Pushnitski. On a trouvé la formule asymptotique pour les valeurs propres et les valeurs singulères. Comme application des ces résultats on a obtenu dans [152] l'asymptotique de l'approximation des fonctions avec les singularités logarithmiques par les fonctions rationnelles. Ça complète les résultats classiques de Jackson-Bernstein et Stahl.

XVI. La théorie de diffusion des opérateurs de Hankel. Il une certaine similarité entre les classes des opérateurs de Hankel et des opérateurs différentiels. Pour les opérateurs différentiels la théorie de diffusion (c'est-à-dire la théorie de spectre absolument continu) est très bien developpée. En revanche, pour les opérateurs de Hankel les résultats de ce type sont très rares et isolés. On a developpé la théorie de diffusion pour les opérateurs de Hankel dont les symbols ont des sauts de continuité (avec A. Pushnitski, [149]) et pour les classes des opérateurs géneralisant l'opérateur classique de Carleman [140,153].

Articles de revue

Dans les revues [80, 81] écrites avec M.Sh.Birman, on donne une présentation détaillée de la théorie de la fonction de shift spectral et de la théorie de la matrice de diffusion.

Les articles [107, 108] et [124, 125] sont entrés dans deux encyclopédies destinées aux mathématiciens aussi bien qu'aux physiciens.

L'article [112] se base sur un cours sur la théorie de diffusion donné par moi au centre mathématique de Canberra en Australie.

Monographes

Le livre "Mathematical scattering theory" est consacré à la théorie de la diffusion pour les opérateurs auto-adjoints (et unitaires) dans l'espace de Hilbert. Dans le premier volume "General theory" on donne une présentation de la théorie au niveau des opérateurs dans l'espace de Hilbert abstrait mais elle est orientée vers les applications aux opérateurs différentiels. Des méthodes différentes (pour les perturbations lisses et à trace, stationnaire et dependante du temps) sont discutées.

Les applications de la théorie abstraite aux opérateurs différentiels constituent le deuxième volume "Analytic theory" publié par AMS en 2010. Voici son contenu :

Chapter 0. Basic concepts
Chapter 1. Smooth theory. The Schrödinger operator
Chapter 2. Smooth theory. General differential operators
Chapter 3. Scattering for perturbations of trace-class type
Chapter 4. One-dimensional scattering
Chapter 5. The limiting absorption principle and expansion theorem
Chapter 6. High- and low-energy asymptotics
Chapter 7. The scattering matrix and the scattering cross section
Chapter 8. The spectral shift function and trace formulas
Chapter 9. The Schrödinger operator with a long-range potential
Chapter 10 . The limiting absorption principle and radiation estimates revisited

Le livre "Scattering theory: some old and new problems" se base sur mon exposé au Congrès International en Mathématique, Berlin, 1998. En particulier, on présente ici une approche unifiée aux solutions de 2 problèms majeurs de la théorie de diffusion : le problème pour des potentiels à longue portée et le problème à N corps. De point de vue analytique, les solutions de ces problèmes se basent sur le principe d'absorption limite et les estimations de radiation.

Liste des publications

Monographes

1. Mathematical Scattering Theory (General Theory), AMS, 1992, Providence, Rhode Island.

2. Scattering theory: some old and new problems, Lecture Notes Math., v. 1735, 2000, Springer-Verlag.

3. Mathematical Scattering Theory (Analytic Theory), AMS, 2010, Providence, Rhode Island.

Articles (les titres des travaux en russe ont été traduits en français)

1. Sur le spectre negatif de l'équation de Schrödinger operatorielle, Mat. zametki, t.7, No.6, 1970.

2. Sur le spectre de l'opérateur polyharmonique perturbé, Problèmes de phys. math., t.5, 1971.

3. Trace formulas for charged particles in nonrelativistic quantum mechanics, Teor. mat. phys., t.11, No.1, 1972 (traduit par Plenum Publ. Corp.).

4. Sur le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger à trois corps, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., t.206, No.1, 1972.

5. Le spectre ponctuel dans le problème quantique à plusieurs corps, Anal. fonct., t.6, No.4, 1972.

6. Sur le spectre de l'opérateur polyharmonique perturbé, II, Problèmes de phys. math., t.6, 1973.

7. Remarques sur la théorie de diffusion pour l'opérateur polyharmonique perturbé, Mat. zametki, t.15, No. 3, 1974.

8. On the theorie of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator, Math. USSR Sbornik, vol.23, No.4, 1974, 535-559.

9. Sur l'état quasilié d'énergie zéro de l'équation de Schrödinger, Zap. sem.sci. LOMI, t.51, 1975.

10. On the finiteness of discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator, Teor. mat. phys., t.25, No.2, 1975 (traduit par Plenum Publ. Corp.).

11.On the number of discrete levels in the quantum problem of three particles, Teor. mat. phys., t.27, No.1, 1976 (traduit par Plenum Publ. Corp.).

12. On the point spectrum in the quantum-mechanical many-body problem, Math. USSR Izvestija, vol.10, No.4, 1976.

13. Théorèmes de trace dans des espaces de Sobolev anisotropes, Zap. sem. sci. LOMI, t.69, 1977 (avec E.L.Korotjaev).

14. Diffusion potentielle dans des situations anisotropes, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., t.235, No.4, 1977 (avec V.G.Deich et E.L.Korotjaev).

15. Theory of potential scattering, taking into account spatial anisotropy, J. Soviet. Math. v. 34, n 6, 2040-2050, 1986 (traduit de Zap. sem. sci. LOMI, t.73, 1977) (avec V.G.Deich et E.L.Korotjaev).

16. Sur le spectre singulier dans le problème à trois corps, Mat. sbornik, t.106, No.4, 1978.

17. Sur la théorie de la diffusion à deux espaces appliquée au problème à plusieurs canaux, Teor. mat. phys., t.37, No.1, 1978.

18. Estimations du spectre discret pour le systeme à trois corps, Proc. Conf. Eq. Dér. Part., Moscou, 1978.

19. Sur la violation de l'unitarité en diffusion par un potentiel dépendant du temps, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., t.243, No.5, 1978.

20. On the break-down of completeness of wave operators in potential scattering, Comm. Math. Phys., v.65, No. 2, 1979.

21. On the proof of Enss of asymptotic completeness in potential scattering, Preprint LOMI, E-2-79, 1979.

22. La complétude asymptotique pour l'équation non-stationnaire de Schrödinger à plusieurs variables, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., t.251, No.4, 1980.

23. Sur les "fonctions propres" de l'équation de Schrödinger non-stationnaire, Teor. mat. phys., t.45, No.2, 1980.

24. Wave operators for the Schrödinger equation, Teor. mat. phys., t.45, No.2, 1980 (traduit par Plenum Publ. Corp.).

25. Les conditions d'unitarité des opérateurs d'ondes pour la diffusion par un potentiel non-stationnaire, Anal. fonct., t.14, No.4, 1980.

26. L'asymptotique du spectre de la matrice de diffusion pour scattering potentiel, C.R. Acad.Sci. U.R.S.S., t.255, No.5, 1980 (avec M.Sh.Birman).

27. Spectral theory and scattering for the D'Alembert operator with a vector potentiel, Proc. Steklov Inst. Math. No. 2, 1-9, 1981 (avec V.G.Deich).

28. On the trace formula in the multichannel Friedrichs model, Proc. Steklov Inst. Math. No. 2, 205-213, 1981.

29. On the asymptotic behavior of solutions of the time-dependent Schrödinger equation, Math. USSR sbornik, v. 39, 169-188, 1981.

30. La décroissance rapide en temps des solutions de l'équation de Schrödinger, C.R. Acad.Sci. U.R.S.S., t.258, No.3, 1981.

31. L'asymptotique du spectre de la matrice de diffusion, Zap. sem. sci. LOMI, t.110, 1981 (avec M.Sh.Birman).

32. Contre-exemple à un théoreme d'unicité pour les fonctions analytiques opératorielles, Zap. sem. sci. LOMI, t.113, 1981.

33. Diffusion à basse énergie pour les potentiels à longue portée, C.R. Acad.Sci. U.R.S.S., t.263, No.4, 1982.

34. Asymptotic behavior of the limiting phase shifts in the case of scattering by a potentiel without spherical symmetry, Teor. mat. phys., t.51, 1982 (traduit par Plenum Publ. Corp.) (avec M.Sh.Birman).

35. Nonstationary scattering theory for elliptic differential operators, J. Soviet. Math. v. 28, n 5, 814-824, 1985 (traduit de Zap. sem. sci. LOMI, t.115, 1982).

36. Scattering theory for time-dependent Hamiltonians, Lect. Notes in Physics, v.153, 1982.

37. Scattering theory for zero-range potentials, periodic in time, Sel. Math. Sov. v. 4, N. 3, 277-287, 1985 (traduit de Problèmes de phys. math., t.10, 1982) (avec M.R.Sayapova).

38. The low energy scattering for slowly decreasing potentials, Comm. Math. Phys., v.85, 1982.

39. Les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel positif à longue portée, Anal. fonct., t.16, 1982.

40. Scattering subspaces and asymptotic completeness for the time-dependent Schrödinger equation, Math. USSR Sbornik v. 46, No. 2, 267-283, 1983.

41. Le théorème du viriel et les conditions d'unitarité pour les opérateurs d'ondes en diffusion par un potentiel non-stationnaire, Trudy MIAN, t.159, 1983.

42. L'asymptotique des solutions des équations intégrales de Volterra et la théorie de diffusion, Rapport à Congres Int. Math., 1983.

43. The evolution operator for time dependent potentials of zero radius, Proc. Steklov Inst. Math. No. 2, 173-180, 1984. (avec M.R.Sayapova)

44. Remarques sur la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger du type de celui à plusieurs corps, J. Soviet Math. v. 31, No. 6, 3445-3459, 1985 (traduit de Zap. sem.sci. LOMI, t.133, 1984).

45. Scattering theory for time-dependent zero-range potentials, Ann.I.H.P., ph.th., t.40, 1984.

46. On the asymptotics of solutions of Volterra integral equations, Arkiv for matem., v.23, No.1, 1985.

47. L'analyse des phases pour le problème de diffusion par un potentiel central, Zap. sem. sci. LOMI, t.147, 1985 (avec A.V.Sobolev).

48. Sur l'approximation eiconale pour l'équation de Schrödinger, Publ. Conf.Ondes et Diffr., Tbilisi, 1985.

49. L'approximation eiconale pour l'équation de Schrödinger, Uspehi mat. nauk, t.40, No.5, 1985.

50. Resonant scattering on a negative potential, J. Sov. Math. v. 35, 549-559, 1986.

51. On the quasi-classical limit of the total scattering cross-section in non-relativistic quantum mechanics, Ann.I.H.P., ph.th., t.44, No. 2, 1986 (avec A.V.Sobolev).

52. La théorie de la diffusion dans deux espaces, Anal. fonct., t.20, No.2, 1986.

53. The eikonal approximation and the asymptotics of the total scattering cross-section for the Schrödinger equation, Ann. I.H.P., ph.th., t.44, No.4, 1986.

54. L'approximation eiconale pour des potentiels à courte portée, J. Soviet Math. v. 49, No. 5, 1225-1236, 1990 (traduit de Zap. sci. sem. LOMI, t.163, 1987).

55. Asymptotique semiclassique de l'amplitude et de la section efficace de diffusion, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., t.292, No.2, 1987.

56. A general scheme in the stationary scattering theory, Amer. Math. Soc. transl. (2),1957, 87-112, 1993 (traduit de Problèmes de phys. mat., t.12, 1987) (avec M. Sh. Birman).

57. L'approximation eikonale pour l'équation de Schrödinger, Trudy MIAN, t.179, 1988.

58. M.Sh.Birman (60 anniversaire), Uspehi mat. nauk, t.43, 1988 (avec V.Buslaev, L.Faddeev, I.Gelfand, O.Ladyshenskaja, B.Pavlov, M.Solomyak).

59. Asymptotique quasiclassique de l'amplitude et de la section efficace de diffusion, Publ. conf. théorie des opérateurs, Kuibyshev, 1988.

60. On the quasi-classical asymptotics of the forward scattering amplitude and of the total scattering cross-section, Ecole Polytechnique, exposé No.7, 1988.

61. Quasi-classical asymptotics of the scattering amplitude and of the scattering cross-section, IAMP Congress, Swansea, 1988.

62. Quasiclassical asymptotics of the scattering cross-section for the Schrödinger equation, Math. USSR Izvestiya, v. 32, 141-165, 1989.

63. Spectral properties of the scattering matrix, Funct Anal. and Appl., v.23, No.3, 249-251, 1989 (avec A.V.Sobolev).

64. On the effective bounds for the total scattering cross-section, Conf. Schrödinger operators, World Sci., 1989 (avec A.V.Sobolev).

65. Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry, Review on the book by Cycon, Froese, Kirsch and Simon, Leningrad Math. J. , vol.1, No.3, 1990.

66. Un complement à la Chapitre 3 du redacteur de la translation du livre "Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry" by Cycon, Froese, Kirsch and Simon.

67. L'asymptotique des phases de diffusion pour l'équation de Schrödinger, Anal. fonct., t.24, No.4, 1990.

68. On resonant scattering for time-periodic perturbations, Journees "EDP", Saint-Jean-de-Monts, 1990.

69. On the asymptotics of scattering phases for the Schrödinger equation, Ann. I.H.P., ph.th., t.53, No.3, 1990.

70. Les propriétés spectrales de la matrice de diffusion abstraite, Proc. Steklov Inst. Math., t.188, n 3, 159-189, 1990 (avec A.V.Sobolev).

71. The nuclear method in potential scattering theory, J. Sov. Math., v. 56, 2285-2299, 1991 (avec M.Sh.Birman).

72. On some spectral properties of the scattering matrix, in: Integral equations and inverse problems, Longman, 1991.

73. On the quasi-stationary approach to scattering for pertubations periodic in time, in: Recent developments in quantum mechanics, Kluwer, 1991.

74. On solutions of the Schrödinger equation with radiation conditions at infinity, in: Estimates and asymptotics for discrete spectra, Adv. Sov. Math., v.7, AMS, 1991.

75. Radiation conditions and scattering theory for three-particle Hamiltonians, Astérisque, v. 210, 1992.

76. On the scattering matrix for perturbations of constant sign, Ann.I.H.P., ph.th. v. 57, No. 4, 1992.

77. Radiation conditions and scattering theory for N-particle quantum systems, Exposé No.1, Ecole Polytechnique, Séminaire 1991-1992.

78. On a zero-range interaction of a quantum particle with the vacuum, J. Phys. A, t.25, 1992.

79. Radiation conditions and scattering theory for N-particle Schrödinger operators, Lecture Notes Phys. v. 403, 234-247, 1992.

80. Radiation conditions and scattering theory for N-particle Hamiltonians (Main ideas of the approach), Journees "EDP", Saint-Jean-de-Monts et Operator Theory, Adv. and Appl., v. 57, 349-359, Birkhäuser, 1992.

81. The spectral shift function, The works by M.G.Krein and their further development, St Petersbourg Math. J., v. 4, n. 5, 833-870, 1993 (avec M.Sh.Birman).

82. Spectral properties of the scattering matrix, St Petersbourg Math. J., v. 4, n. 6, 1993, 1055-1079 (avec M.Sh.Birman).

83. Radiation conditions and scattering theory for N-particle Hamiltonians, Comm. Math. Phys. v.154, 523-554, 1993.

84. On the scattering matrix for the N-particle Hamiltonians, Fascicule d'EDP, Publ. Année 1992 - 1993, Université de Rennes et Proceedings of a Mathematical Physics summer school, The University of British Columbia, 1994.

85. Unification of the trace-class and smooth approaches in scattering theory, Lecture Notes in Math., Springer, v. 1573, 1994.

86. Eigenfunctions of the continuous spectrum for the N-particle Schrödinger operator, Proceedings of the Taniguchi Symposium, Marcel Dekker, 1994.

87. New channels in three-body long-range scattering, Exposé à l'Ecole Polytechnique, Séminaire 1993-1994.

88. Scattering matrix for the perturbation of a periodic Schrödinger operator by a decaying potential, St Petersbourg Math. J., v. 6, n. 3, 453-474, 1995 (avec M.Sh.Birman).

89. Resolvent estimates and scattering matrix for the N-particle Hamiltonians, Integral Equations and Operator Theory, v. 21, 95 - 126, 1995.

90. New channels of scattering for long-range potentials, Proceedings of the Conference in Holzhau, Operator Theory V.78, Birkhäuser, 1995.

91. On trace theorems for pseudo-differential operators, Exposé à l'Ecole Polytechnique, Séminaire 1995-1996 (avec N. Lerner).

92. New channels of scattering for three-body quantum systems with long-range potentials, Duke Math J., v. 82, No. 3, 553-584, 1996.

93. New channels in two-body long-range scattering, St Petersbourg Math. J., v. 8, 165-182, 1997.

94. New channels of scattering for two- and three-body quantum systems with long-range potentials, The IMA volumes in Math. and its Appl. Springer, v. 89, 217-223, 1997.

95. On the classical and quantum Coulomb scattering, J. Phys. A.: Math. Gen. v. 30, 6981-6992, 1997.

96. Trace theorems for pseudo-differential operators, J. Analyse Math. v. 74, 113-164, 1998 (avec N. Lerner).

97. The scattering amplitude for the Schrödinger operator with a long-range potential, Comm. Math. Phys. v. 191, 183-218, 1998.

98. Scattering theory: some old and new problems, Documenta Math., Proc. of the ICM, Berlin 1998, v. 3, 87-96.

99. On the scientific work of M. Sh. Birman, in: Advances in the Mathematical sciences, v. 189, 1-15, 1999 (avec V. S. Buslaev et M. Z. Solomyak).

100. The discrete spectrum in the singular Friedrichs model, in: Advances in the Mathematical sciences, v. 189, 255-274, 1999.

101. A model in perturbation theory, Proc. conf. mathematical methods in quantum mechanics, Prague (1998), Birkhäuser, 1999.

102. On solutions of the Schrödinger equation with radiation conditions at infinity: the long-range case, Ann. Inst. Fourier v. 49, 1581-1602, 1999 (avec Y. Gâtel).

103. Sharp constants in the Hardy-Rellich inequalities, J. Funct. Anal. v. 168, 121-144, 1999.

104. Mikhail Shlemovich Birman (on the seventieth birthday), Uspehi Mat. Nauk, v. 55, n.1, 204-207, 2000 (avec V. S. Buslaev, A. M. Verschik, I. M. Gel'fand, S. G. Gindikin, O. A. Ladyzhenskaya et M. Z. Solomyak).

105. A class of pseudo-differential operators with oscillating symbols, St Petersbourg Math. J., v.11, 375-403, 2000.

106. On a singular perturbation of a multiplication operator, In : "Systems, approximation, singular integral operators and related topics", Proc. Iwota 2000, Operator Theory : advances and applications, Birkhäuser, 509-527, 2001.

107. Scattering theory for the Dirac operator with a long-range electromagnetic potential, J. Funct. Anal, v. 184, 509-527, 2001 (avec Y. Gâtel).

108. Mathematical foundations, Chapter 6.1.1, 1633-1639, in : Scattering, edited by Sabatier and Pike, Academic Press, 2002.

109. Short-range interactions, Chapter 6.1.2, 1640-1647, in : Scattering, edited by Sabatier and Pike, Academic Press, 2002.

110. High energy asymptotics of the scattering amplitude for the Schrödinger equation, Proc. Indian Acad. of Science, Math. Sciences, v. 112, N 1, 245-255, 2002.

111. High energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude (main ideas of the approach), RIMS Symposium on "Spectral and scattering theory", December 2001, Proceedings of RIMS Kokyuroku, 1255, Japan, 2002.

112. On the mathematical theory of the Aharonov-Bohm effect, J. Phys. A.: Math. Gen. v. 35, 7481-7492, 2002 (avec Ph. Roux).

113. Lectures on scattering theory, Proceedings of the math. center of Canberra, v. 40, 61-88, Australia, 2002.

114. High energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude, J. Funct. Anal., v. 202, 526-570, 2003.

115. A particle in a magnetic field of an infinite rectilinear current, Math. Phys. Anal. Geom., v. 6, 219-230, 2003.

116. The scattering matrix for the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential, J. Math. Phys., v. 44, 2762-2786, 2003 (avec Ph. Roux).

117. Scattering matrix for magnetic potentials with Coulomb decay at infinity, Int. Eq. Op. Theory, v. 47, 217-249, 2003.

118. Mikhail Shlemovich Birman (on the occasion of his 75th birthday), Saint-Petersburg Math. J., v. 16, n.1, 5-14, 2004 (avec V. S. Buslaev et M. Z. Solomyak).

119. A particle in the Biot-Savart-Laplace magnetic field: explicit solutions, Proc. of ICMP, World Sci., 2004.

120. Spectral shift function for self-adjoint operators without spectral gaps, Proceedings of the conference on spectral theory, Oberwolfach, December, 2004.

121. On inverse scattering at a fixed energy for potentials with a regular behaviour at infinity, Inverse problems, v. 21, 1937-1952, 2005 (avec R. Weder).

122. A trace formula for the Dirac operator, Bulletin of the London Mathematical Society, v. 37, n 6, p. 908-918, 2005.

123. Trace-class approach in scattering problems for perturbations of media, Proceedings of the conference on spectral theory in Sinaya, Roumanie, Advances in operator algebras and math. physics, 275-285, Theta, 2005.

124. Scattering by magnetic fields, Saint-Petersburg Math. J., v. 17, N 5, p. 875-895, 2006.

125. Quantum mechanical scattering, in :Encyclopedia of Math. Physics, Elsevier, 251-259, 2006.

126. N-particle quantum scattering, in : Encyclopedia of Math. Physics, Elsevier, 585-592, 2006.

127. Inverse scattering at a fixed energy for long-range potentials, Inverse problems and Imaging, v. 1, N 1, 217-224, 2007 (avec R. Weder).

128. Perturbation determinants, the spectral shift function, trace identities, and all that, Funct. Anal. and Appl. , v. 41, N 3, 2007.

129. Exponential decay of eigenfunctions of first order systems, Contemporary Mathematics, v. 447, 249-256, 2007.

130. On spectral properties of translationally invariant magnetic Schrödinger operators, Ann. Henri Poincaré, v. 9, N 1, 181-207, 2008.

131. Spectral and scattering theory of fourth order differential operators. Advances in the Mathematical Sciences, AMS, v. 225, 265-299, 2008.

132. Spectral theory of discontinuous functions of self-adjoint operators and scattering theory, J. Funct. Anal., v. 259, 1950-1973, 2010 (avec A. Pushnitski).

133. A generalized virial theorem and the balance of kinetic and potential energies in the semiclassical limit, J. Phys. A: Math. Theor. v. 43, 2010.

134. A commutator method for the diagonalization of Hankel operators, Funct. Anal. and Appl. , v. 44, N 4, 2010.

135. An introduction to the collection of papers by M. Sh. Birman on mathematical scattering theory and spectral shift function, Regular and chaotic dynamics, 2010 (Russian).

136. The semiclassical limit of eigenfunctions of the Schrödinger equation and the Bohr-Sommerfeld quantization condition, revisited, Saint-Petersbourg Math. J., v. 22, N 6, 1051-1067, 2011.

137. On the mathematical works of M. Sh. Birman, A/A, Saint-Petersburg Math. J., v. 23, n.1, 5-60, 2011 (avec M. Z. Solomyak et T. A. Suslina).

138. A trace formula for differential operators of arbitrary order, Operator Theory: Adv. and Appl. v. 218, 541-570, 2011. (avec J. Östensson).

139. A multichannel scheme in smooth scattering theory (avec A. Pushnitski), Journal of Spectral Theory **3**, N 4, 601 - 634, 2013.

140. Spectral and scattering theory for perturbations of the Carleman operator, St.-Petersburg Math. J. **25**, N 2, 339-359, 2014.

141. Symmetrized Hankel operators and spectral theory of piecewise continuous functions of self-adjoint operators (avec A. Pushnitski), Proceedings of London Math. Society **108**, 1079-1115, 2014.

142. Diagonalizations of two classes of unbounded Hankel operators, Bulletin Math. Sciences **4**, N 4, 175-198, 2014.

143. Criteria for Hankel operators to be sign-definite, Analysis & PDE **8**, N 1, 183–221, 2015.

144. On finite rank Hankel operators, J. Funct. Anal. **268**, 1808–1839, 2015.

145. Quasi-Carleman operators and their spectral properties, Integral Eq. Oper. Theory **81**, 499–534, 2015.

146. Sharp estimates for singular values of Hankel operators (avec A. Pushnitski), Integral Eq. Oper. Theory **83**, 393-411, 2015.

147. Asymptotic behaviour of eigenvalues of Hankel operators (avec A. Pushnitski) Int. Math. Res. Notices **2015** (22), 11861-11886, 2015.

148. Quasi-diagonalization of Hankel operators, ArXiv: 1403.3941 (2014) accepté by J. d'Analyse Mathématique.

149. Spectral and scattering theory of self-adjoint Hankel operators with piecewise continuous symbols (avec A. Pushnitski), J. Oper. Theory **74**, 101-139, 2015.

150. Localization principle for compact Hankel operators (avec A. Pushnitski), J. Funct. Anal. **270**, 3591-3621, 2016.

151. Best rational approximations of functions with logarithmic singularities (avec A. Pushnitski), Constructive Approximation, DOI 10.1007/s00365-016-9347-1, 2016.

152. Spectral asymptotics for compact self-adjoint Hankel operators (avec A. Pushnitski), ArXiv: 1601.01305 (2016), to appear in J. Spectral Theory.

153. Spectral and scattering theory for differential and Hankel operators, ArXiv: 1511.04683 (2015).

154. Unbounded Hankel operator and moment problems, Integral Eq. Oper. Theory, **85**, 289-300, 2016.

155. On semibounded Toeplitz operators, arXiv: 1603.06229 (2016), to appear in J. Oper. Theory.

156. Hankel and Toeplitz operators: continuous and discrete representations, arXiv: 1607.04988 (2016), to appear in Opuscula Mathematica.

157. On semibounded Wiener-Hopf operators, arXiv: 1606.01361 (2016).