Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 02.04.2020

5. Критерий существования собственного базиса у оператора, действующего из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^n$.

Теорема 4.16. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует базис в $\mathbb{K}^n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$.
2) Справедливы равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \dots, \sigma_p = \tau_p$.

Доказательство.

1) Предположим, что существует собственный базис $\{f_k\}_{k=1}^n$ для оператора $\mathbb{A}$. Переставим векторы базиса так, чтобы сначала шли векторы из собственного подпространства F_{μ_1}, затем из F_{μ_2}, и т.д.:

$$\{f_1^{(1)}, \dots, f_{l_1}^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_{l_2}^{(2)}, \dots, f_1^{(p)}, \dots, f_{l_p}^{(p)}\}.$$

Поскольку каждый из наборов

$$\{f_1^{(1)}, \dots, f_{l_1}^{(1)}\} \in F_{\mu_1},\ \{f_1^{(2)}, \dots, f_{l_2}^{(2)}\} \in F_{\mu_2}, \dots, \{f_1^{(p)}, \dots, f_{l_p}^{(p)}\} \in F_{\mu_p}$$

линейно независим, справедливо неравенство

$$\dim(F_{\mu_1} \dot{+} \dots \dot{+} F_{\mu_2}) = \dim F_{\mu_1} + \dots + \dim F_{\mu_p} \geqslant n.$$

Следовательно, справедливо разложение $\mathbb{K}^n = F_{\mu_1} \dot{+} \dots \dot{+} F_{\mu_2}$. Откуда следует равенство $\tau_1 + \dots + \tau_p = n$. Согласно теоремам 4.9 и 4.13 справедливы соотношения

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_p = n, \quad \tau_1 \leqslant \sigma_1, \dots, \tau_p \leqslant \sigma_p,$$

которые и приводят к требуемым равенствам $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \dots, \sigma_p = \tau_p$.

2) Предположим выполнены равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \dots, \sigma_p = \tau_p$. Тогда, в силу теорем 4.9, 4.14, справедливо соотношение $\tau_1 + \dots + \tau_p = n$, из которого вытекает разложение $\mathbb{K}^n = F_{\mu_1} \dot{+} \dots \dot{+} F_{\mu_2}$. Следовательно, объединение базисов подпространств $F_{\mu_1}, \dots, F_{\mu_p}$ является базисом в $\mathbb{K}^n$, а значит оператор $\mathbb{A}$ имеет собственный базис.

$\square$

§5. Подобие матриц. Диагонализация матриц.

1. Подобие матриц. Инварианты подобия.

Опр. Говорят, что матрица $B \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ подобна матрице $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$, если найдется обратимая матрица $X \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ такая, что справедливо равенство $B = X^{-1}AX$. Матрицу X называют *матрицей осуществляющей подобие* матриц B и A.

Обозначение. Тот факт, что матрица B подобна матрице A будем обозначать $B \sim A$.

Свойства.

1) Каждая матрица подобна самой себе.

Доказательство. Положим $X = I$; тогда справедливо $A = X^{-1}AX$. □

2) Если матрица B подобна матрице A, то матрица A подобна матрице B.

Доказательство. Найдется обратимая матрица X такая, что $B = X^{-1}AX$. Следовательно, справедливо равенство $A = XBX^{-1} = (X^{-1})^{-1}B(X^{-1})$. □

3) Если матрица A подобна матрице B, и матрица B подобна матрице C, то матрица A подобна матрице C.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX, \quad B = Y^{-1}CY \Rightarrow A = X^{-1}Y^{-1}CYX = (YX)^{-1}C(YX).$$

□

4) Если $A = \mathbb{O}$, то $B \sim A$ в том и только в том случае, когда $B = \mathbb{O}$.

Доказательство.

$$B = X^{-1}\mathbb{O}X = X^{-1}\mathbb{O} = \mathbb{O}.$$

□

5) Если $A = I$, то $B \sim A$ в том и только в том случае, когда $B = I$.

Доказательство.

$$B = X^{-1}IX = X^{-1}X = I.$$

□

6) Если $A \sim B$, то $A^m \sim B^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow A^m = X^{-1}BX \cdot X^{-1}BX \cdot \ldots \cdot X^{-1}BX = X^{-1}B^mX.$$

□

7) Если $A \sim B$, то $A^t \sim B^t$, $A^* \sim B^*$.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow A^t = \left(X^{-1}BX\right)^t = X^tB^t(X^{-1})^t = X^tB^t(X^t)^{-1} = ((X^t)^{-1})^{-1}B^t((X^t)^{-1});$$

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow A^* = \left(X^{-1}BX\right)^* = X^*B^*(X^{-1})^* = X^*B^*(X^*)^{-1} = ((X^*)^{-1})^{-1}B^*((X^*)^{-1}).$$

□

8) Если матрицы A и B подобны, то $\det A = \det B$.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow \det A = \det\left(X^{-1}BX\right) = (\det X)^{-1}\det B\,\det X = \det B.$$

□

9) Если матрицы A и B подобны и обратимы, то матрицы A^{-1} и B^{-1} подобны.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow A^{-1} = \left(X^{-1}BX\right)^{-1} = X^{-1}B^{-1}(X^{-1})^{-1} = X^{-1}B^{-1}X.$$

□

Теорема 5.1. Если матрицы A и B подобны, то их характеристические многочлены совпадают.

Доказательство.

$$A = X^{-1}BX \Rightarrow d_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(X^{-1}BX - \lambda I) =$$
$$= \det\left(X^{-1}(B - \lambda I)X\right) = (\det X)^{-1}\det(B - \lambda I)\det X = \det(B - \lambda I) = d_B(\lambda).$$

□

Следствие 5.2. Если матрицы A и B подобны, то справедливо равенство $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$.

Замечание. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ — базисы в пространстве E; $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор; пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\tilde{A} \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$. Можно показать, что матрицы A и $\tilde{A}$ подобны (и матрица, осуществляющая подобие принадлежит классу $M^{n,n}(\mathbb{K})$).

2. Диагонализация матриц. Диагонализация матриц в классе вещественных и комплексных матриц.

Опр. Матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{K})$ называется диагонализуемой, если она подобна диагональной. Более точно:

- Матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ называется диагонализуемой в классе вещественных матриц, если найдется обратимая матрица $X \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ такая, что $X^{-1}AX = B$, где матрица B диагональна:
$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
- Матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ называется диагонализуемой в классе комплексных матриц, если найдется обратимая матрица $X \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ такая, что $X^{-1}AX = B$, где матрица B диагональна.

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ недиагонализуема. В самом деле, нетрудно проверить равенство $d_A(\lambda) = \lambda^2$. Предположим, что матрица A подобна диагональной матрице $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Поскольку характеристические многочлены матриц A и B совпадают, справедливо равенство $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \equiv \lambda^2$, а потому $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$, и значит $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким образом $B = \mathbb{O}$, а тогда и $A = \mathbb{O}$, что противоречит условию.

Теорема 5.3. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор, заданный матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$;

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда

1) Матрица A диагонализуема в классе комплексных матриц, если и только если справедливы равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \ldots, \sigma_p = \tau_p$.
2) Если $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ — собственный базис оператора $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $k = 1, \ldots, n$, и матрица X составлена из векторов-столбцов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$: $X = (\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n)$, то справедливо соотношение
$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{+}$$

Доказательство. 1) Начнем со второго утверждения теоремы. Нетрудно видеть, что равенства $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $k = 1, \ldots, n$, эквивалентны матричному равенству
$$AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} X. \tag{$*$}$$

При этом матрица X обратима, т.к. ее столбцы образуют линейно независимый набор. Таким образом из равенства $(*)$ вытекает соотношение $(+)$.

2) Перейдем к первому утверждению теоремы. Если справедливы равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \ldots, \sigma_p = \tau_p$, то по теореме 4.16 оператор $\mathbb{A}$ обладает собственным базисом, а значит (по доказанному выше) матрица A диагонализуется.

Обратно, если матрица A диагонализуется, то найдется матрица $X = (\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n)$ такая, что
$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$
или в эквивалентной форме
$$AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} X.$$

Последнее равенство эквивалентно равенствам $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $k = 1, \ldots, n$, что означает наличие собственного базиса у оператора $\mathbb{A}$, что (по теореме 4.16) влечет равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \ldots, \sigma_p = \tau_p$.

$\square$

Теорема 5.4. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, заданный матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$;
$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \ldots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \ldots & \tau_p \end{pmatrix}$$
— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда

1) Матрица A диагонализуема в классе вещественных матриц, если и только если справедливы равенства $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2, \ldots, \sigma_p = \tau_p$.

2) Если $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ — собственный базис оператора $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $k = 1, \ldots, n$, и матрица X составлена из векторов-столбцов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$: $X = (\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n)$, то справедливо соотношение
$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 5.4 буквально повторяет доказательство теоремы 5.3 (без всяких изменений). □

Глава V. Евклидовы пространства.

§1. Вещественное евклидово пространство.

1. Определение и основные свойства вещественного евклидова пространства. Скалярное произведение.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$; предположим, что задана операция сопоставляющая каждой паре векторов $x, y \in E$ вещественное число $(x, y) \in \mathbb{R}$. Эту операцию будем называть скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим требованиям.

1) При всех $x \in E$ $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ если и только если $x = \mathbb{O}$.
2) При всех $x, y \in E$ справедливо равенство $(x, y) = (y, x)$.
3) При всех $x, y, z \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верны равенства
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad (z, x + y) = (z, x) + (z, y);$$
$$(\alpha x, y) = (x, \alpha y) = \alpha(x, y).$$

Вещественное линейное пространство E, с заданным в нем скалярным произведением, называют вещественным евклидовым пространством. Требования (1) – (3) к скалярному произведению называют аксиомами вещественного евклидова пространства.

Обозначение. Если мы не хотим указывать конкретные аргументы в скалярном произведении, мы будем писать так $(\cdot, \cdot)$.

Свойства.

1) $(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma y_1 + \delta y_2) = \alpha\gamma(x_1, y_1) + \alpha\delta(x_1, y_2) + \beta\gamma(x_2, y_1) + \beta\delta(x_2, y_2)$.

   Доказательство. Из третьей аксиомы. □

2) $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l y_l) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_k \beta_l (x_k, y_l)$.

   Доказательство. По индукции. □

3) При всех $x, y \in E$ $(x, \mathbb{O}) = (\mathbb{O}, y) = 0$.

   Доказательство.
$$(x, \mathbb{O}) = (x, 0 \cdot \mathbb{O}) = 0(x, \mathbb{O}) = 0.$$
□

Примеры.

1) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O; $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Тогда $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $E = E_3$.

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим скалярное произведение равенством

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^t\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Упр. Проверьте, что все аксиомы евклидова пространства выполнены.

3) Пусть $E = \mathbb{R}^n$ — стандартное вещественное координатное пространство; заданы положительные числа $\{q_j\}_{j=1}^n$; определим скалярное произведение равенством

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k y_k, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Упр. Проверьте, что все аксиомы евклидова пространства выполнены.

4) Пусть $E = M^{m,n}(\mathbb{R})$ — пространство матриц, $(A, B) = \mathrm{Tr} B^t A$, $A, B \in E$; тогда $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

5) Пусть $E = C([a, b] \to \mathbb{R})$ — пространство непрерывных функцмй; $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, $f, g \in E$. Тогда $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

2. Норма вектора, угол между векторами в вещественном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Нормой (длиной) вектора $x \in E$ называется число $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойства.

1) При всех $x \in E$ справедливо $\|x\| \geqslant 0$; при этом $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$.

   Доказательство. Данное свойство непосредственно вытекает из первой аксиомы вещественного евклидова пространства. □

2) При всех $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верно равенство $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

   Доказательство.

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)}.$$

□

3) Справедливо неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in E.$$

   Доказательство. Если $x = \mathbb{O}$ или $y = \mathbb{O}$, то утверждение очевидно (обе части неравенства обращаются в ноль).

Предположим, что векторы x, y не равны нулю. Справедливы очевидные соотношения:

$$0 \leqslant (x+ty, x+ty) = t^2(y,y) + 2t(x,y) + (x,x) = t^2\|y\|^2 + 2t(x,y) + \|x\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, квадратный трехчлен $t^2\|y\|^2 + 2t(x,y) + \|x\|^2$ имеет не более одного корня, а потому соответствующий дескриминант не превосходит нуля:

$$D/4 = (x,y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$(x,y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2,$$

что эквивалентно требуемому неравенству. □

4) Справедливо (первое) неравенство треугольника:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

5) Справедливо второе неравенство треугольника:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \\ \|y\| = \|y-x+x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|.$$

□

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет определить угол между векторами вещественного евклидова пространства. Более точно, для всех векторов $x, y \in E \setminus \{\mathbb{O}\}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right| \leqslant 1.$$

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство, углом между ненулевыми векторами $x, y \in E$ называется угол $\varphi \in [0, \pi]$, удовлетворяющий уравнению

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Пример. Определить нормы, скалярное произведение и угол для функций $f, g \in C([0,1])$, где $f(t) = 1-t$, $g(t) = t^2$.

Решение.

$$(f,f) = \int\limits_0^1 (1-t)^2 dt = \int\limits_0^1 \tau^2 d\tau = 1/3, \quad \|f\| = 1/\sqrt{3};$$

$$(g,g) = \int\limits_0^1 t^4 dt = 1/5, \quad \|g\| = 1/\sqrt{5};$$

$$(f,g)=\int\limits_0^1(1-t)t^2dt=\int\limits_0^1(t^2-t^3)dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12};$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{15}}{12}.$$

$\square$