Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 07.05.2020

§11. Линейные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Здесь мы обсудим результаты предыдущего параграфа в частном случае стандартного комплексного евклидова пространства. Для полноты изложения мы приведем большинство результатов с доказательствами (не ссылаясь на §10). Мы дадим унитарному оператору и унитарной матрице определения не совпадающие с изложенными выше, но эквивалентные им (согласно теореме 10.4 и предложению 10.5).

Напомним, что стандартным комплексным пространством мы называем пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* \cdot \vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

1. Сопряжение линейного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Лемма 11.1. Для любой матрицы $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ справедливы равенства

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство.

$$(A\vec{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} x_j \right) \overline{y_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} [A]_{ij} \overline{y_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\sum_{i=1}^{n} [A^*]_{ji} y_i} = (\vec{x}, A^*\vec{y}).$$

□

Теорема 11.1. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$. Тогда существует единственный линейный оператор $\mathbb{B} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условию

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{B}\vec{y}).$$

Доказательство. Проверим существование оператора $\mathbb{B}$. Пусть оператор $\mathbb{A}$ задается матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$. Зададим оператор $\mathbb{B}$ матрицей A^*. В силу леммы 11.1 оператор $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{B}\vec{y}).$$

Проверим единственность оператора $\mathbb{B}$. Предположим имеются два оператора $\mathbb{B}_1$,$\mathbb{B}_2$ такие, что

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{B}_1\vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{B}_2\vec{y}).$$

Тогда при вяком $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ справедливо:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{B}_1\vec{y} - \mathbb{B}_2\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, \mathbb{A}\vec{x}) - (\vec{y}, \mathbb{A}\vec{x}) = 0.$$

Следовательно, $\mathbb{B}_1\vec{y} = \mathbb{B}_2\vec{y}$ при всех $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$, а потому $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$. □

Опр. Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ — линейные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве, удовлетворяющие условию

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{B}\vec{y}).$$

Тогда оператор $\mathbb{B}$ обозначается через $\mathbb{A}^*$ и называется сопряженным к оператору $\mathbb{A}$.

Свойства.

1) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$.

Доказательство.

$$((\mathbb{A}+\mathbb{B})\vec{x},\vec{y}) = (\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) + (\mathbb{B}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{A}^*\vec{y}) + (\vec{x},\mathbb{B}^*\vec{y}) = (\vec{x},(\mathbb{A}^*+\mathbb{B}^*)\vec{y}).$$

□

2) $(\alpha\mathbb{A})^* = \overline{\alpha}(\mathbb{A}^*)$.

Доказательство.

$$(\alpha\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) = \alpha(\vec{x},\mathbb{A}^*\vec{y}) = (\vec{x},\overline{\alpha}\mathbb{A}^*\vec{y}).$$

□

3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B}\vec{x},\vec{y}) = (\mathbb{B}\vec{x},\mathbb{A}^*\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}^*\mathbb{A}^*\vec{y}).$$

□

4) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}^*\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\mathbb{A}^*\vec{x})} = \overline{(\mathbb{A}\vec{y},\vec{x})} = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y}).$$

□

5) $I^* = I$.
6) $\mathbb{O}^* = \mathbb{O}$.
7) $(\mathbb{A}^*\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y})$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}^*\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\mathbb{A}^*\vec{x})} = \overline{(\mathbb{A}\vec{y},\vec{x})} = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y}).$$

□

8) Пусть оператор $\mathbb{A}$ задан матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$. Тогда оператор $\mathbb{A}^*$ задан матрицей A^*.
9) $\det\mathbb{A}^* = \overline{\det\mathbb{A}}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

10) $\mathrm{Tr}\mathbb{A}^* = \overline{\mathrm{Tr}\mathbb{A}}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

11) $\mathrm{rank}\mathbb{A}^* = \mathrm{rank}\mathbb{A}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

Опр. Оператор $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве называется самосопряженным, если $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$.

Свойства.

1) Для любого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве оператор $\mathbb{A}_{re} := \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*)$ — самосопряженный.
2) Для любого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве оператор $\mathbb{A}_{im} := \frac{1}{2i}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^*)$ — самосопряженный.
3) Каждый оператор $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве раскладывается в сумму $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{re} + i\mathbb{A}_{im}$.

2. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 11.3. Для всякого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве справедливо разложение

$$\mathrm{Ran}\mathbb{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = \mathbb{C}^n.$$

Доказательство.

$$\vec{z} \in (\mathrm{Ran}\mathbb{A})^\perp \Leftrightarrow \forall \vec{f} \in \mathrm{Ran}\mathbb{A} \quad (\vec{z}, \vec{f}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad (\vec{z}, \mathbb{A}\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{A}^*\vec{z}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}^*\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{z} \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}^*.$$

□

Следствия теоремы 11.3. Для всякого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве справедливы следующие утверждения.

1) $\mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathbb{C}^n$.
2) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A}^* = \mathbb{C}^n$.
3) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathbb{C}^n$.
4) Уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{f}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\vec{f} \perp \mathrm{Ker}\mathbb{A}^*$.
5) Уравнение $\mathbb{A}x = \vec{f}$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}^*\vec{x} = \vec{0}$ имеет только нулевое решение.
6) Уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$ имеет только нулевое решение.
7) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = \{\vec{0}\}$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют непосредственно из теоремы 11.3. Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и соотношений

$$\mathrm{dimRan}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A}^* = \mathrm{dimRan}\mathbb{A}^*.$$

Утверждение 4) является переформулировкой теоремы 11.3. Утверждение 5) вытекает непосредственно из теоремы 11.3. Утверждение 6) следует из утверждения 3). Утверждение 7) вытекает из утверждений 1) и 3). □

Отметим, что шестое следствие фактически является альтернативой Фредгольма.

3. Унитарные матрицы. Унитарные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Опр. Матрицу $U \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ называют унитарной, если ее столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Задаваемый матрицей U оператор $\mathbb{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ будем называть унитарным.

Теорема 11.4. Для матрицы $U \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ следующие утверждения эквивалентны:

(i) U — ортогональна;

(ii) при всех $\vec{x}, \vec{y}, \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство $(U\vec{x}, U\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$;

(iii) $U^*U = I$;

(iv) $UU^* = I$;

(v) матрица U обратима и справедливо равенство $U^{-1} = U^*$.

Доказательство. Эта теорема, разумеется, следует из теоремы 10.4 и предложения 10.5, однако на экзамене эту теорему разрешается привести без доказательства. □

Свойства унитарной матрицы.

1) Если U унитарная, то $U^* = U^{-1}$ — унитарная.
2) Единичная матрица I — унитарна.
3) Если U_1 и U_2 — унитарные, то U_1U_2 — унитарная.
4) Если U унитарная, то $|\mathrm{det} U| = 1$.
5) Всякая вещественная ортогональная матрица унитарна.

§12. Самосопряженные и унитарные операторы в конечномерном комплексном евклидовом пространстве

1. Собственные числа и собственные подпространства самосопряженного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве.

Лемма 12.1. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$. Тогда при всех $x \in E$ справедливо включение $(\mathbb{A}x, x) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $(\mathbb{A}x, x) = (x, \mathbb{A}^*x) = (x, \mathbb{A}x) = \overline{(\mathbb{A}x, x)}$. □

Теорема 12.2. Все собственные значения самосопряженного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве вещественны; собственные подпространства самосопряженного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

При всяком μ_j, $j = 1, \dots, p$, выберем $f \in F_{\mu_j} \setminus \{\mathbb{O}\}$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу μ_j. Тогда справедливы соотношения

$$\mathbb{R} \ni \frac{(\mathbb{A}f, f)}{\|f\|^2} = \frac{(\mu_j f, f)}{\|f\|^2} = \frac{\mu_j (f, f)}{\|f\|^2} = \mu_j.$$

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{A}$ (в этом случае хотя бы одно из них не равно нулю, предположим, например, $\mu_j \neq 0$); $f \in F_{\mu_i}$, $g \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(g, f) = \frac{1}{\mu_j}(\mathbb{A}g, f) = \frac{1}{\mu_j}(g, \mathbb{A}^* f) = \frac{1}{\mu_j}(g, \mathbb{A}f) = \frac{\overline{\mu_i}}{\mu_j}(g, f) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(g, f).$$

Таким образом, верно равенство

$$(g, f) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(g, f).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(g, f) = 0$, т.е. $F_{\mu_j} \perp F_{\mu_i}$. □

Напомним, что для ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E самосопряженный оператор $\mathbb{A}$ изображается в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ самосопряженной матрицей. Также вспомним, что вещественная симметричная матрица является самосопряженной. Из теоремы 12.2 и теоремы 4.4 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 12.3. Все собственные числа самосопряженной матрицы вещественны.

Следствие 12.4. Все собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны.

2. Инвариантные и приводящие подпространства линейного оператора.

Опр. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — подпространство в E. Говорят, что подпространство F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$, если выполнено условие $\forall f \in F \;\; \mathbb{A}f \in F$. Иногда говорят, что F инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — подпространство в E. Говорят, что подпространство F — приводящее подпространство оператора $\mathbb{A}$, если F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ и $F^\perp$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Зададим отображение $\mathbb{A}\mid_F \colon F \to F$ формулой $\forall f \in F \;\; \mathbb{A}\mid_F (f) = \mathbb{A}f$. Отображение $\mathbb{A}\mid_F$ называется сужением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство F.

Упр. Проверьте, что отображение $\mathbb{A}\mid_F$ — линейный оператор.

Лемма 12.5. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, $\mathbb{A}f = \lambda f$, $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда подпространство $\mathscr{L}\{f\}$ инвариантно относительно $\mathbb{A}$.

Доказательство. Для любого $x \in \mathscr{L}\{f\}$ имеет место представление $x = \alpha f$. Следовательно, справедливы соотношения $\mathbb{A}x = \alpha\mathbb{A}f = \alpha\lambda f \in \mathscr{L}\{f\}$. □

Лемма 12.6. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$. Тогда всякое инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ является приводящим подпространством оператора $\mathbb{A}$.

Доказательство. Пусть F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Необходимо проверить, что ортогональное дополнение $F^{\perp}$ к подпространству F является инвариантным подпространством оператора $\mathbb{A}$. В самом деле, для любого вектора $g \in F^{\perp}$ справедливы соотношения

$$\forall f \in F \quad (\mathbb{A}g, f) = (g, \mathbb{A}^* f) = (g, \mathbb{A}f) = 0, \quad \text{т.к.} \quad \mathbb{A}f \in F, \quad g \in F^{\perp}.$$

Таким образом, справедливо включение $\mathbb{A}g \in F^{\perp}$, т.е. $F^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора A. $\square$

3. Существование собственного ортонормированного базиса у самосопряженного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 12.7. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E, удовлетворяющий условию $\mathbb{A}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}$, обозначим его через λ_1 и найдем какой-нибудь собственный вектор e_1 отвечающий собственному числу λ_1 и удовлетворяющий условию $\|e_1\| = 1$ (такой вектор всегда найдется, см. лекцию от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2, теоремы 4.4, 4.5). Для единообразия обозначим $E =: E_1$, $\mathbb{A} =: \mathbb{A}_1$. Далее рассмотрим подпространство $E_2 := \mathscr{L}\{e_1\}^{\perp}$. По леммам 12.5, 12.6 подпространство E_2 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_1$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_2 := \mathbb{A}_1 \mid_{E_2}$. Нетрудно видеть, что выполнены следующие равенства

$$\forall x, y \in E_2 \quad (\mathbb{A}_2 x, y) = (\mathbb{A}_1 x, y) = (x, \mathbb{A}_1^* y) = (x, \mathbb{A}_1 y) = (x, \mathbb{A}_2 y).$$

Таким образом оператор $\mathbb{A}_2 \in \Lambda(E_2)$ самосопряжен.

Повторим всю процедуру: выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}_2$, обозначим его через λ_2 и найдем какой-нибудь собственный вектор $e_2 \in E_2$ ($e_2 \perp e_1$) отвечающий собственному числу λ_2 и удовлетворяющий условию $\|e_2\| = 1$. Отметим сразу равенства $\mathbb{A}e_2 = \mathbb{A}_2 e_2 = \lambda_2 e_2$. В пространстве E_2 рассмотрим подпространство $E_3 := \mathscr{L}\{e_2\}^{\perp}$. По леммам 12.5, 12.6 подпространство E_3 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_2$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_3 := \mathbb{A}_2 \mid_{E_3}$. Как и выше оператор $\mathbb{A}_3 \in \Lambda(E_3)$ самосопряжен.

Далее, повторяя процедуру, получим ортонормированный набор $\{e_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяющий условию $\mathbb{A}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Из теорем 12.2, 12.7 и 4.5 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекает следующий результат.

Теорема 12.8. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = E$.

4. Собственные числа и собственные подпространства унитарного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 12.9. Все собственные значения унитарного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве имеют модуль равный единице; собственные подпространства унитарного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$, — унитарный оператор;

$$\sigma(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

При всяком μ_j, $j = 1, \ldots, p$, выберем $f \in F_{\mu_j} \setminus \{\mathbb{O}\}$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу μ_j. Тогда справедливы соотношения

$$1 = \frac{(\mathbb{U}f, \mathbb{U}f)}{\|f\|^2} = \frac{(\mu_j f, \mu_j f)}{\|f\|^2} = \frac{\mu_j \overline{\mu_j}(f, f)}{\|f\|^2} = |\mu_j|^2.$$

Отметим, что для комплексных чисел, равных единице по модулю, справедливы соотношения:

$$|z| = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{U}$; $f \in F_{\mu_i}$, $g \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(f, g) = (\mathbb{U}f, \mathbb{U}g) = (\mu_i f, \mu_j g) = \mu_i \overline{\mu_j}(f, g) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(f, g).$$

Таким образом, верно равенство

$$(f, g) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(f, g).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(f, g) = 0$, т.е. $F_{\mu_i} \perp F_{\mu_j}$. □

Напомним, что для ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E унитарный оператор $\mathbb{U}$ изображается в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ унитарной матрицей. Также вспомним, что вещественная ортогональная матрица является унитарной. Из теоремы 12.9 и теоремы 4.4 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 12.10. Все собственные числа унитарной матрицы равны единице по модулю.

Следствие 12.11. Все собственные числа вещественной ортогональной матрицы равны единице по модулю.

5. Существование собственного ортонормированного базиса у унитарного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 12.12. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$ — унитарный. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E, удовлетворяющий условию $\mathbb{U}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Эту теорему мы приведем без доказательства. □

Из теорем 12.9, 12.12 и 4.5 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекает следующий результат.

Теорема 12.13. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$ — унитарный оператор,
$$\sigma(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \end{pmatrix}.$$
Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $|\mu_i| = 1$, $i = 1, \dots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = E$.