Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 09.04.2020

3. Ортогональность векторов в вещественном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство. Тогда векторы $x, y \in E$ называются ортогональными (или перпендикулярными), если $(x, y) = 0$.

Обозначение. $(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Теорема 1.1 (Пифагора). Пусть векторы x и y ортогональны. Тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство. Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{p} \subset E$ называется ортогональной, если $e_k \perp e_l$ при $k \neq l$.

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство. Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{p} \subset E$ называется ортонормированной, если $e_k \perp e_l$ при $k \neq l$, и $\|e_k\| = 1$, $k = 1, \ldots, p$.

Свойства.

1) Если система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{p}$ ортогональна и $e_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, p$, то система $\{e_k\}_{k=1}^{p}$ линейно независима.

   Доказательство. Пусть при некоторых $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

   $$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = \mathbb{O}.$$

   Умножим последнее равенство скалярно на e_j:

   $$(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p, e_j) = 0.$$

   Последнее равенство разумеется эквивалентно соотношению

   $$\alpha_1(e_1, e_j) + \cdots + \alpha_j(e_j, e_j) + \cdots + (e_p, e_j) = 0.$$

   Учитывая ортогональность системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^{p}$, получаем

   $$\alpha_j \|e_j\|^2 = 0.$$

   Следовательно, справедливо $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$. □

2) Пусть система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{p}$ ортонормирована, $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$. Тогда $\alpha_k = (x, e_k)$, $k = 1, \ldots, p$.

   Доказательство.

   $$(x, e_k) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (e_j, e_k) = \alpha_k \|e_k\|^2 = \alpha_k, \quad k = 1, \ldots, p.$$

   □

3) Пусть система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $x = \sum\limits_{k=1}^p \alpha_k e_k$. Тогда

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2.$$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = (x,x) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \alpha_k \alpha_l (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2.$$

□

Теорема 1.2. Пусть E — вещественное евклидово пространство; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E. Тогда для любого $x \in E$ справедливы соотношения

$$x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k;$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2.$$

Доказательство. Теорема вытекает из свойств 2 и 3. □

Теорема 1.3. Ортогонализация по Шмидту. Пусть E — вещественное евклидово пространство; $\{f_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_1 = f_1, \quad e_1 = \tfrac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|};\\
&\tilde{e}_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1, \quad e_2 = \tfrac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|};\\
&\tilde{e}_3 = f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2)e_2, \quad e_3 = \tfrac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|};\\
&\vdots\\
&\tilde{e}_n = f_n - (f_n, e_1)e_1 - \ldots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1}, \quad e_n = \tfrac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}.
\end{aligned}$$

Тогда все векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ не равны нулю; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E.

Доказательство. Очевидно $\tilde{e}_1 = f_1 \neq \mathbb{O}$; предположим, что векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^p$ ненулевые. Тогда каждый из векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ выражается через вектора $\{f_s\}_{s=1}^p$: $\{e_k\}_{k=1}^p$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&e_1 = \alpha_1^1 f_1;\\
&e_2 = \alpha_2^1 f_1 + \alpha_2^2 f_2;\\
&e_3 = \alpha_3^1 f_1 + \alpha_3^2 f_2 + \alpha_3^3 f_3;\\
&\vdots\\
&e_p = \alpha_n^1 f_1 + \ldots + \alpha_n^p f_p,
\end{aligned}$$

с подходящими коэффициентами. Тогда равенство нулю вектора $\tilde{e}_{p+1}$ означало бы равенство нулю линейной комбинации векторов $\{f_k\}_{k=1}^{p+1}$, причем коэффициент при векторе f_{p+1} был бы равен единице, т.е. набор векторов $\{f_k\}_{k=1}^{p+1}$ был бы линейно зависим. Это невозможно, следовательно, все векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ не равны нулю.

По построению векторы $\{e_k\}_{k=1}^n$ единичной длины. Нетрудно видеть

$$(\tilde{e}_2, e_1) = (f_2, e_1) - (f_2, e_1)\|e_1\|^2 = 0.$$

Следовательно, векторы e_1, e_2 ортогональны. Предположим, что набор $\{e_s\}_{s=1}^{k-1}$ ортонормирован. Тогда при любом $l < k$

$$(\tilde{e}_k, e_l) = (f_k - \sum_{j=1}^{k-1} (f, e_j) e_j, e_l) = (f_k, e_l) - (f_k, e_l)\|e_l\|^2 = 0.$$

Таким образом набор $\{e_k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, а значит является базисом. $\square$

§2. Стандартное вещественное евклидово пространство.

Здесь мы применим теорию вещественных евклидовых пространств к пространству $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^t \cdot \vec{x}$. Для полноты изложения мы повторим доказательства всех утверждений в этом случае.

1. Стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Опр. Стандартным скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$ мы называем следующую функцию, сопоставляющую паре векторов вещественное число:

$$(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^t\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ с определенным на нем стандартным скалярным произведением будем называть *стандартным вещественным евклидовым пространством.*

Свойства.

1) При всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\vec{x},\vec{x}) \geqslant 0$; $(\vec{x},\vec{x}) = 0$ если и только если $\vec{x} = \vec{0}$.

   Доказательство. Для всякого $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ очевидны соотношения
   $$(\vec{x},\vec{x}) = \vec{x}^t\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geqslant 0.$$
   Более того, из равенства $(\vec{x},\vec{x}) = 0$ немедленно следует $\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

2) При всех $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$.

   Доказательство.
   $$(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^t\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \vec{x}^t\vec{y} = (\vec{y},\vec{x}), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$
   $\square$

3) При всех $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верны равенства
   $$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z}), \quad (\vec{z},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{z},\vec{x}) + (\vec{z},\vec{y});$$
   $$(\alpha\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x},\vec{y}).$$
   Доказательство.
   $$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = \vec{z}^t(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{z}^t\vec{x} + \vec{z}^t\vec{y} = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z});$$
   $$(\alpha\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^t(\alpha\vec{x}) = \alpha(\vec{y}^t\vec{x}) = \alpha(\vec{x},\vec{y}).$$
   $\square$

4) $(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \gamma\vec{y}_1 + \delta\vec{y}_2) = \alpha\gamma(\vec{x}_1,\vec{y}_1) + \alpha\delta(\vec{x}_1,\vec{y}_2) + \beta\gamma(\vec{x}_2,\vec{y}_1) + \beta\delta(\vec{x}_2,\vec{y}_2)$.

   Доказательство. Из третьего свойства. $\square$

5) $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k, \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l \vec{y}_l) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_k \beta_l (\vec{x}_k, \vec{y}_l)$.

   Доказательство. По индукции. □

6) При всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{y}) = \vec{0}$.

   Доказательство.

$$(\vec{x}, \vec{0}) = (x, 0 \cdot \vec{0}) = 0(x, \vec{0}) = 0.$$

□

2. Норма вектора, угол между векторами в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Опр. Стандартной нормой (длиной) вектора называется число

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^t \vec{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Свойства.

1) При всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо $\|\vec{x}\| \geqslant 0$; при этом $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

   Доказательство. Данное свойство непосредственно вытекает из первого свойства стандартного скалярного произведения. □

2) При всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верно равенство $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$.

   Доказательство.

$$\|\alpha \vec{x}\| = \sqrt{(\alpha \vec{x}, \alpha \vec{x})} = \sqrt{\alpha^2 (\vec{x}, \vec{x})} = |\alpha| \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

□

3) Справедливо неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

   Доказательство. Если $\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$, то утверждение очевидно (обе части неравенства обращаются в ноль).

   Предположим, что векторы $\vec{x}, \vec{y}$ не равны нулю. Справедливы очевидные соотношения:

$$0 \leqslant (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = t^2 (\vec{y}, \vec{y}) + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x}) = t^2 \|\vec{y}\|^2 + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{x}\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Следовательно, квадратный трехчлен $t^2 \|\vec{y}\|^2 + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{x}\|^2$ имеет не более одного корня, а потому соответствующий дискриминант не превосходит нуля:

$$D/4 = (\vec{x}, \vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leqslant 0.$$

   Последнее неравенство перепишем в виде

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2,$$

   что эквивалентно требуемому неравенству. □

4) Справедливо (первое) неравенство треугольника:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|, \quad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Доказательство.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2+2(\vec{x},\vec{y})+\|\vec{y}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\vec{x}\|^2+2|(\vec{x},\vec{y})|+\|\vec{y}\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2.$$

□

5) Справедливо второе неравенство треугольника:

$$\big|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|, \quad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{x}\| = \|\vec{x}-\vec{y}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|+\|\vec{y}\| \Rightarrow \|\vec{x}\|-\|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| = \|\vec{y}-\vec{x}+\vec{x}\| \leqslant \|\vec{y}-\vec{x}\|+\|\vec{x}\| \Rightarrow \|\vec{y}\|-\|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|\end{array}\right\} \Rightarrow \big|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

□

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет определить угол между векторами стандартного вещественного евклидова пространства. Более точно, для всех векторов $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right| \leqslant 1.$$

Опр. Углом между ненулевыми векторами $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ называется угол $\varphi\in[0,\pi]$, удовлетворяющий уравнению

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}.$$

§3. Комплексное евклидово пространство.

Напомним операцию сопряжения над комплексными числами:

$$z=a+ib \Rightarrow \overline{z}=a-ib; \quad z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}; \quad z\overline{z}=|z|^2; \quad z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z.$$

1. Определение и основные свойства комплексного евклидова пространства. Скалярное произведение.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; предположим, что задана операция сопоставляющая каждой паре векторов $x,y\in E$ комплексное число $(x,y)\in\mathbb{C}$. Эту операцию будем называть скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим требованиям.

1) При всех $x\in E$ $(x,x)\geqslant 0$; $(x,x)=0$ если и только если $x=\mathbb{O}$.
2) При всех $x,y\in E$ справедливо равенство $(x,y)=\overline{(y,x)}$.
3) При всех $x,y,z\in E$, $\alpha\in\mathbb{C}$ верны равенства

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z), \quad (z,x+y)=(z,x)+(z,y);$$

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y);$$

$$(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y).$$

Комплексное линейное пространство E, с заданным в нем скалярным произведением, называют комплексным евклидовым пространством. Требования (1) – (3) к скалярному произведению называют аксиомами комплексного евклидова пространства.

Обозначение. Если мы не хотим указывать конкретные аргументы в скалярном произведении, мы будем писать так $(\cdot,\cdot)$.

Свойства.

1) $(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma y_1 + \delta y_2) = \alpha\overline{\gamma}(x_1, y_1) + \alpha\overline{\delta}(x_1, y_2) + \beta\overline{\gamma}(x_2, y_1) + \beta\overline{\delta}(x_2, y_2)$.

   Доказательство. Из третьей аксиомы. □

2) $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l y_l) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_k \overline{\beta_l}(x_k, y_l)$.

   Доказательство. По индукции. □

3) При всех $x, y \in E$ $(x, \mathbb{O}) = (\mathbb{O}, y) = 0$.

   Доказательство.
$$(x, \mathbb{O}) = (x, 0 \cdot \mathbb{O}) = 0(x, \mathbb{O}) = 0.$$
□

Примеры.

1) В пространстве $\mathbb{C}^n$ определим скалярное произведение равенством
$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$
   Упр. Проверьте, что все аксиомы евклидова пространства выполнены.

2) Пусть $E = \mathbb{C}^n$ — стандартное комплексное координатное пространство; заданы положительные числа $\{q_j\}_{j=1}^{n}$; определим скалярное произведение равенством
$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \overline{y_k}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$
   Упр. Проверьте, что все аксиомы евклидова пространства выполнены.

3) Пусть $E = M^{m,n}(\mathbb{C})$ — пространство матриц, $(A, B) = \mathrm{Tr} B^* A$, $A, B \in E$; тогда $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

4) Пусть $E = C([a, b] \to \mathbb{C})$ — пространство непрерывных функцмй; $(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$, $f, g \in E$. Тогда $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

2. Норма вектора в комплексном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Нормой (длиной) вектора $x \in E$ называется число $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойства.

1) При всех $x \in E$ справедливо $\|x\| \geqslant 0$; при этом $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$.

Доказательство. Данное свойство непосредственно вытекает из первой аксиомы вещественного евклидова пространства. □

2) При всех $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$ верно равенство $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Доказательство.

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2 (x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)}.$$

□

3) Справедливо неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство. Если $x = \mathbb{O}$ или $y = \mathbb{O}$, то утверждение очевидно (обе части неравенства обращаются в ноль). Предположим, что векторы x, y не равны нулю. Справедливы очевидные соотношения:

$$0 \leqslant (x + ty, x + ty) = t^2(y, y) + t((x, y) + (y, x)) + (x, x) =$$
$$= t^2\|y\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x, y) + \|x\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, квадратный трехчлен $t^2\|y\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x, y) + \|x\|^2$ имеет не более одного корня, а потому соответствующий дискриминант не превосходит нуля:

$$D/4 = \mathrm{Re}(x, y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$\mathrm{Re}(x, y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2, \quad x, y \in E. \qquad (+)$$

Для произвольных ненулевых векторов $x, y \in E$ скалярное произведение (x, y) представимо в экспоненциальном виде:

$$(x, y) = |(x, y)|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Очевидно справедливы соотношения:

$$|(x, y)| = e^{-i\varphi}(x, y) = (e^{-i\varphi}x, y).$$

К скалярному произведению векторов $e^{-i\varphi}x$ и y применим неравенство (+):

$$|(x, y)| = (e^{-i\varphi}x, y) = \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}x, y) \leqslant \|x\|\|y\|,$$

что и требовалось доказать. □

4) Справедливо (первое) неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

5) Справедливо второе неравенство треугольника:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\| \\ \|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

□