Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 13.04.2020

Мы начнем с того, что добавим некоторый материал ко второму параграфу «Стандартное вещественное евклидово пространство». Добавим к нему еще один пункт об ортогональности векторов.

3. Ортогональность векторов в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.

Опр. Векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ называются ортогональными (или перпендикулярными), если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Обозначение. $(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

Теорема 2.1 (Пифагора). Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны. Тогда $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Доказательство.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

□

Опр. Система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}^n$ называется ортогональной, если $\vec{e}_k \perp \vec{e}_l$ при $k \neq l$.

Опр. Система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}^n$ называется ортонормированной, если $\vec{e}_k \perp \vec{e}_l$ при $k \neq l$, и $\|\vec{e}_k\| = 1$, $k = 1, \dots, p$.

Свойства.

1) Если система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ ортогональна и $\vec{e}_k \neq \vec{0}$, $k = 1, \dots, p$, то система $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ линейно независима.

   Доказательство. Пусть при некоторых $\{\alpha_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

   $$\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p = \vec{0}.$$

   Умножим последнее равенство скалярно на $\vec{e}_j$:

   $$(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p, \vec{e}_j) = 0.$$

   Последнее равенство разумеется эквивалентно соотношению

   $$\alpha_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_j) + \dots + \alpha_j (\vec{e}_j, \vec{e}_j) + \dots + \alpha_p (\vec{e}_p, \vec{e}_j) = 0.$$

   Учитывая ортогональность системы векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$, получаем

   $$\alpha_j \|\vec{e}_j\|^2 = 0.$$

   Следовательно, справедливо $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, p$. □

2) Пусть система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{e}_k$. Тогда $\alpha_k = (\vec{x}, \vec{e}_k)$, $k = 1, \dots, p$.

Доказательство.

$$(\vec{x},\vec{e}_k)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j(\vec{e}_j,\vec{e}_k)=\alpha_k\|\vec{e}_k\|^2=\alpha_k,\quad k=1,\dots,p.$$

□

3) Пусть система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{p}$ ортонормирована, $\vec{x}=\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k\vec{e}_k$. Тогда

$$\|\vec{x}\|^2=\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|^2.$$

Доказательство.

$$\|\vec{x}\|^2=(\vec{x},\vec{x})=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\alpha_k\alpha_l(\vec{e}_k,\vec{e}_l)=\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|^2\|\vec{e}_k\|^2=\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|^2.$$

□

Теорема 2.2. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^{n}(\vec{x},\vec{e}_k)\vec{e}_k;$$

$$\|\vec{x}\|^2=\sum_{k=1}^{n}|(\vec{x},\vec{e}_k)|^2.$$

Доказательство. Теорема вытекает из свойств 2 и 3. □

Теорема 2.3. Ортогонализация по Шмидту. Пусть $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^{n}$ — базис в пространстве $\mathbb{R}^n$; векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\tilde{\vec{e}}_1=\vec{f}_1,\quad \vec{e}_1=\tfrac{\tilde{\vec{e}}_1}{\|\tilde{\vec{e}}_1\|};\\
&\tilde{\vec{e}}_2=\vec{f}_2-(\vec{f}_2,\vec{e}_1)\vec{e}_1,\quad \vec{e}_2=\tfrac{\tilde{\vec{e}}_2}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|};\\
&\tilde{\vec{e}}_3=\vec{f}_3-(\vec{f}_3,\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\vec{f}_3,\vec{e}_2)\vec{e}_2,\quad \vec{e}_3=\tfrac{\tilde{\vec{e}}_3}{\|\tilde{\vec{e}}_3\|};\\
&\vdots\\
&\tilde{\vec{e}}_n=\vec{f}_n-(\vec{f}_n,\vec{e}_1)\vec{e}_1-\ldots-(\vec{f}_n,\vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1},\quad \vec{e}_n=\tfrac{\tilde{\vec{e}}_n}{\|\tilde{\vec{e}}_n\|}.
\end{aligned}$$

Тогда все векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^{n}$ не равны нулю; $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Очевидно $\tilde{\vec{e}}_1=\vec{f}_1\neq\vec{0}$; предположим, что векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^{p}$ ненулевые. Тогда каждый из векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{p}$ выражается через вектора $\{\vec{f}_s\}_{s=1}^{p}$: $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{p}$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1=\alpha_1^1\vec{f}_1;\\
&\vec{e}_2=\alpha_2^1\vec{f}_1+\alpha_2^2\vec{f}_2;\\
&\vec{e}_3=\alpha_3^1\vec{f}_1+\alpha_3^2\vec{f}_2+\alpha_3^3\vec{f}_3;\\
&\vdots\\
&\vec{e}_p=\alpha_n^1\vec{f}_1+\ldots+\alpha_n^p\vec{f}_p,
\end{aligned}$$

с подходящими коэффициентами. Тогда равенство нулю вектора $\tilde{\vec{e}}_{p+1}$ означало бы равенство нулю линейной комбинации векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^{p+1}$, причем коэффициент при векторе $\vec{f}_{p+1}$ был бы равен единице, т.е. набор векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^{p+1}$ был бы линейно зависим. Это невозможно, следовательно, все векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^{n}$ не равны нулю.

По построению векторы $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ единичной длины. Нетрудно видеть

$$(\tilde{\vec{e}}_2, \vec{e}_1) = (\vec{f}_2, \vec{e}_1) - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\|\vec{e}_1\|^2 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортогональны. Предположим, что набор $\{\vec{e}_s\}_{s=1}^{k-1}$ ортонормирован. Тогда при любом $l < k$

$$(\tilde{\vec{e}}_k, \vec{e}_l) = (\vec{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1}(\vec{f}, \vec{e}_j)\vec{e}_j, \vec{e}_l) = (\vec{f}_k, \vec{e}_l) - (\vec{f}_k, \vec{e}_l)\|\vec{e}_l\|^2 = 0.$$

Таким образом набор $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, а значит является базисом. $\square$

Далее, мы возвращаемся к третьему параграфу «Комплексное евклидово пространство».

3. Ортогональность векторов в комплексном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.

Свойства комплексного евклидова пространства чрезвычайно похожи на свойства вещественного пространства. Для полноты изложения мы повторим здесь все доказательства, даже если они повторяют доказательсва вещественного случая.

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство. Тогда векторы $x, y \in E$ называются ортогональными (или перпендикулярными), если $(x, y) = 0$.

Обозначение. $(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Свойство. $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.

Теорема 3.1 (Пифагора). Пусть векторы x и y ортогональны. Тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$\square$

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство. Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p \subset E$ называется ортогональной, если $e_k \perp e_l$ при $k \neq l$.

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство. Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p \subset E$ называется ортонормированной, если $e_k \perp e_l$ при $k \neq l$, и $\|e_k\| = 1$, $k = 1, \dots, p$.

Свойства.

1) Если система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ ортогональна и $e_k \neq \mathbb{O}$, $k = 1, \dots, p$, то система $\{e_k\}_{k=1}^p$ линейно независима.

   Доказательство. Пусть при некоторых $\{\alpha_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

   $$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = \mathbb{O}.$$

   Умножим последнее равенство скалярно на e_j:

   $$(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p, e_j) = 0.$$

   Последнее равенство разумеется эквивалентно соотношению

   $$\alpha_1(e_1, e_j) + \dots + \alpha_j(e_j, e_j) + \dots + \alpha_p(e_p, e_j) = 0.$$

Учитывая ортогональность системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$, получаем

$$\alpha_j \|e_j\|^2 = 0.$$

Следовательно, справедливо $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$. □

2) Пусть система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$. Тогда $\alpha_k = (x, e_k)$, $k = 1, \ldots, p$.

Доказательство.

$$(x, e_k) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (e_j, e_k) = \alpha_k \|e_k\|^2 = \alpha_k, \quad k = 1, \ldots, p.$$

□

3) Пусть система векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$. Тогда

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2.$$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \alpha_k \overline{\alpha_l} (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2.$$

□

Теорема 3.2. Пусть E — комплексное евклидово пространство; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E. Тогда для любого $x \in E$ справедливы соотношения

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k;$$
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2.$$

Доказательство. Теорема вытекает из свойств 2 и 3. □

Теорема 3.3. Ортогонализация по Шмидту. Пусть E — комплексное евклидово пространство; $\{f_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_1 = f_1, \quad e_1 = \tfrac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|};\\
&\tilde{e}_2 = f_2 - (f_2, e_1) e_1, \quad e_2 = \tfrac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|};\\
&\tilde{e}_3 = f_3 - (f_3, e_1) e_1 - (f_3, e_2) e_2, \quad e_3 = \tfrac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|};\\
&\vdots\\
&\tilde{e}_n = f_n - (f_n, e_1) e_1 - \ldots - (f_n, e_{n-1}) e_{n-1}, \quad e_n = \tfrac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}.
\end{aligned}$$

Тогда все векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ не равны нулю; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E.

Доказательство. Очевидно $\tilde{e}_1 = f_1 \neq \mathbb{O}$; предположим, что векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^p$ ненулевые. Тогда каждый из векторов $\{e_k\}_{k=1}^p$ выражается через вектора $\{f_s\}_{s=1}^p$: $\{e_k\}_{k=1}^p$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&e_1 = \alpha_1^1 f_1;\\
&e_2 = \alpha_2^1 f_1 + \alpha_2^2 f_2;\\
&e_3 = \alpha_3^1 f_1 + \alpha_3^2 f_2 + \alpha_3^3 f_3;\\
&\vdots\\
&e_p = \alpha_n^1 f_1 + \ldots + \alpha_n^p f_p,
\end{aligned}$$

с подходящими коэффициентами. Тогда равенство нулю вектора $\tilde{e}_{p+1}$ означало бы равенство нулю линейной комбинации векторов $\{f_k\}_{k=1}^{p+1}$, причем коэффициент при векторе f_{p+1} был бы равен единице, т.е. набор векторов $\{f_k\}_{k=1}^{p+1}$ был бы линейно зависим. Это невозможно, следовательно, все векторы $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^{n}$ не равны нулю.

По построению векторы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ единичной длины. Нетрудно видеть

$$(\tilde{e}_2, e_1) = (f_2, e_1) - (f_2, e_1)\|e_1\|^2 = 0.$$

Следовательно, векторы e_1, e_2 ортогональны. Предположим, что набор $\{e_s\}_{s=1}^{k-1}$ ортонормирован. Тогда при любом $l < k$

$$(\tilde{e}_k, e_l) = (f_k - \sum_{j=1}^{k-1}(f, e_j)e_j, e_l) = (f_k, e_l) - (f_k, e_l)\|e_l\|^2 = 0.$$

Таким образом набор $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ ортонормирован, а значит является базисом. □

§4. Стандартное комплексное евклидово пространство.

Здесь мы применим теорию комплексных евклидовых пространств к пространству $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* \cdot \vec{x}$. Для полноты изложения мы повторим доказательства всех утверждений в этом случае.

1. Стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Опр. Стандартным скалярным произведением в $\mathbb{C}^n$ мы называем следующую функцию, сопоставляющую паре векторов комплексное число:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Пространство $\mathbb{C}^n$ с определенным на нем стандартным скалярным произведением будем называть *стандартным комплексным евклидовым пространством.*

Свойства.

1) При всех $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$; $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ если и только если $\vec{x} = \vec{0}$.

   Доказательство. Для всякого $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ очевидны соотношения

   $$(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^* \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geqslant 0.$$

   Более того, из равенства $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ немедленно следует $\vec{x} = \vec{0}$. □

2) При всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$.

   Доказательство.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x_k}} = \overline{\vec{x}^* \vec{y}} = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

□

3) При всех $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верны равенства

$$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}), \quad (\vec{z}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{z}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{y});$$

$$(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y});$$

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \overline{\alpha}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Доказательство.

$$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = \vec{z}^*(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{z}^*\vec{x} + \vec{z}^*\vec{y} = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z});$$

$$(\vec{z}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y})^*\vec{z} = \vec{x}^*\vec{z} + \vec{y}^*\vec{z} = (\vec{z}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{y});$$

$$(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^*(\alpha\vec{x}) = \alpha(\vec{y}^*\vec{x}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y});$$

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = (\alpha\vec{y})^*\vec{x} = \overline{\alpha}(\vec{y}^*\vec{x}) = \overline{\alpha}(\vec{x}, \vec{y}).$$

□

4) $(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \gamma\vec{y}_1 + \delta\vec{y}_2) = \alpha\overline{\gamma}(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + \alpha\overline{\delta}(\vec{x}_1, \vec{y}_2) + \beta\overline{\gamma}(\vec{x}_2, \vec{y}_1) + \beta\overline{\delta}(\vec{x}_2, \vec{y}_2)$.

Доказательство. Из третьего свойства. □

5) $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{x}_k, \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l\vec{y}_l) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_k\overline{\beta_l}(\vec{x}_k, \vec{y}_l)$.

Доказательство. По индукции. □

6) При всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ $(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{y}) = \vec{0}$.

Доказательство.

$$(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, 0 \cdot \vec{0}) = 0(\vec{x}, \vec{0}) = 0.$$

□

2. Норма вектора в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Опр. Стандартной нормой (длиной) вектора называется число

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^*\vec{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Свойства.

1) При всех $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ справедливо $\|\vec{x}\| \geqslant 0$; при этом $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Доказательство. Данное свойство непосредственно вытекает из первого свойства стандартного скалярного произведения. □

2) При всех $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ верно равенство $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$.

Доказательство.

$$\|\alpha\vec{x}\| = \sqrt{(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x})} = \sqrt{|\alpha|^2(\vec{x}, \vec{x})} = |\alpha|\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

□

3) Справедливо неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство. Если $\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$, то утверждение очевидно (обе части неравенства обращаются в ноль).

Предположим, что векторы $\vec{x},\vec{y}$ не равны нулю. Справедливы очевидные соотношения:

$$0 \leqslant (\vec{x}+t\vec{y},\vec{x}+t\vec{y}) = t^2(\vec{y},\vec{y}) + t((\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{x})) + (\vec{x},\vec{x}) = t^2\|\vec{y}\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{x}\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, квадратный трехчлен $t^2\|\vec{y}\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{x}\|^2$ имеет не более одного корня, а потому соответствующий дискриминант не превосходит нуля:

$$D/4 = (\mathrm{Re}(\vec{x},\vec{y}))^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$(\mathrm{Re}(\vec{x},\vec{y}))^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2,$$

или, что то же самое,

$$|\mathrm{Re}(\vec{x},\vec{y})| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{+}$$

Для произвольных ненулевых векторов $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y})$ представимо в экспоненциальном виде:

$$(\vec{x},\vec{y}) = |(\vec{x},\vec{y})|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0,2\pi).$$

Очевидно справедливы соотношения:

$$|(\vec{x},\vec{y})| = e^{-i\varphi}(\vec{x},\vec{y}) = (e^{-i\varphi}\vec{x},\vec{y}).$$

К скалярному произведению векторов $e^{-i\varphi}\vec{x}$ и $\vec{y}$ применим неравенство (+):

$$|(\vec{x},\vec{y})| = (e^{-i\varphi}\vec{x},\vec{y}) = \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}\vec{x},\vec{y}) \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|,$$

что и требовалось доказать. $\square$

4) Справедливо (первое) неравенство треугольника:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2|(\vec{x},\vec{y})| + \|\vec{y}\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

$\square$

5) Справедливо второе неравенство треугольника:

$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|, \quad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{x}\| = \|\vec{x}-\vec{y}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}\| \Rightarrow \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| = \|\vec{y}-\vec{x}+\vec{x}\| \leqslant \|\vec{y}-\vec{x}\| + \|\vec{x}\| \Rightarrow \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

$\square$

3. Ортогональность векторов в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.

Опр. Векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ называются ортогональными (или перпендикулярными), если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Обозначение. $(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

Теорема 4.1 (Пифагора). Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны. Тогда $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Доказательство.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

□

Опр. Система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{C}^n$ называется ортогональной, если $\vec{e}_k \perp \vec{e}_l$ при $k \neq l$.

Опр. Система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{C}^n$ называется ортонормированной, если $\vec{e}_k \perp \vec{e}_l$ при $k \neq l$, и $\|\vec{e}_k\| = 1$, $k = 1, \dots, p$.

Свойства.

1) Если система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ ортогональна и $\vec{e}_k \neq \vec{0}$, $k = 1, \dots, p$, то система $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ линейно независима.

   Доказательство. Пусть при некоторых $\{\alpha_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

   $$\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p = \vec{0}.$$

   Умножим последнее равенство скалярно на $\vec{e}_j$:

   $$(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p, \vec{e}_j) = 0.$$

   Последнее равенство разумеется эквивалентно соотношению

   $$\alpha_1(\vec{e}_1, \vec{e}_j) + \dots + \alpha_j(\vec{e}_j, \vec{e}_j) + \dots + \alpha_p(\vec{e}_p, \vec{e}_j) = 0.$$

   Учитывая ортогональность системы векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$, получаем

   $$\alpha_j \|\vec{e}_j\|^2 = 0.$$

   Следовательно, справедливо $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, p$. □

2) Пусть система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^p \alpha_k \vec{e}_k$. Тогда $\alpha_k = (\vec{x}, \vec{e}_k)$, $k = 1, \dots, p$.

   Доказательство.

   $$(\vec{x}, \vec{e}_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \alpha_k \|\vec{e}_k\|^2 = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, p.$$

   □

3) Пусть система векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ ортонормирована, $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^p \alpha_k \vec{e}_k$. Тогда

   $$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2.$$

Доказательство.

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \alpha_k \overline{\alpha_l} (\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2 \|\vec{e}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2.$$

□

Теорема 4.2. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Тогда для любого $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ справедливы соотношения

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}, \vec{e}_k) \vec{e}_k;$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(\vec{x}, \vec{e}_k)|^2.$$

Доказательство. Теорема вытекает из свойств 2 и 3. □

Теорема 4.3. Ортогонализация по Шмидту. Пусть $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве $\mathbb{C}^n$; векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^n$ и $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\tilde{\vec{e}}_1 = \vec{f}_1, \quad \vec{e}_1 = \tfrac{\tilde{\vec{e}}_1}{\|\tilde{\vec{e}}_1\|};\\
&\tilde{\vec{e}}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2 = \tfrac{\tilde{\vec{e}}_2}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|};\\
&\tilde{\vec{e}}_3 = \vec{f}_3 - (\vec{f}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{f}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 = \tfrac{\tilde{\vec{e}}_3}{\|\tilde{\vec{e}}_3\|};\\
&\vdots\\
&\tilde{\vec{e}}_n = \vec{f}_n - (\vec{f}_n, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - \ldots - (\vec{f}_n, \vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1}, \quad \vec{e}_n = \tfrac{\tilde{\vec{e}}_n}{\|\tilde{\vec{e}}_n\|}.
\end{aligned}$$

Тогда все векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^n$ не равны нулю; $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Очевидно $\tilde{\vec{e}}_1 = \vec{f}_1 \neq \vec{0}$; предположим, что векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^p$ ненулевые. Тогда каждый из векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ выражается через вектора $\{\vec{f}_s\}_{s=1}^p$: $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^p$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \alpha_1^1 \vec{f}_1;\\
&\vec{e}_2 = \alpha_2^1 \vec{f}_1 + \alpha_2^2 \vec{f}_2;\\
&\vec{e}_3 = \alpha_3^1 \vec{f}_1 + \alpha_3^2 \vec{f}_2 + \alpha_3^3 \vec{f}_3;\\
&\vdots\\
&\vec{e}_p = \alpha_n^1 \vec{f}_1 + \ldots + \alpha_n^p \vec{f}_p,
\end{aligned}$$

с подходящими коэффициентами. Тогда равенство нулю вектора $\tilde{\vec{e}}_{p+1}$ означало бы равенство нулю линейной комбинации векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^{p+1}$, причем коэффициент при векторе $\vec{f}_{p+1}$ был бы равен единице, т.е. набор векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^{p+1}$ был бы линейно зависим. Это невозможно, следовательно, все векторы $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^n$ не равны нулю.

По построению векторы $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ единичной длины. Нетрудно видеть

$$(\tilde{\vec{e}}_2, \vec{e}_1) = (\vec{f}_2, \vec{e}_1) - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\|\vec{e}_1\|^2 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортогональны. Предположим, что набор $\{\vec{e}_s\}_{s=1}^{k-1}$ ортонормирован. Тогда при любом $l < k$

$$(\tilde{\vec{e}}_k, \vec{e}_l) = (\vec{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{f}, \vec{e}_j)\vec{e}_j, \vec{e}_l) = (\vec{f}_k, \vec{e}_l) - (\vec{f}_k, \vec{e}_l)\|\vec{e}_l\|^2 = 0.$$

Таким образом набор $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, а значит является базисом. □