Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 14.05.2020

Глава VI. Квадратичные формы

§1. Квадратичные формы

1. Понятие квадратичной формы.

Опр. Квадратичной формой называется функция n вещественных переменных следующего вида

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 1.1. Для любой квадратичной формы $\Phi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, существует матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для квадратичной формы

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n,$$

выберем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Очевидны равенства

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (A\vec{x})_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \Phi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

□

Замечание. Очевидно представление $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, не едиственно. Например форма $\Phi(x_1, x_2) = x_1 x_2 = x_2 x_1 = \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, может быть записана следующим образом

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = (B\vec{x}, \vec{x}) = (C\vec{x}, \vec{x}),$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Предложение 1.2. Для любой квадратичной формы $\Phi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, существует единственная симметричная матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Как и выше, для квадратичной формы

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n,$$

выберем матрицу

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Справедливы соотношения

$$\Phi(\vec{x}) = (A_0\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, A_0\vec{x}) = (A_0^t\vec{x}, \vec{x}) = (\frac{1}{2}(A_0 + A_0^t)\vec{x}, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Матрица $A = \frac{1}{2}(A_0 + A_0^t)$ симметрична и удовлетворяет равенству $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что две симметричные матрицы $A, B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ удовлетворяют условию $(A\vec{x}, \vec{x}) = (B\vec{x}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, при всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения:

$$(A(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}) = (B(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}) \Rightarrow$$

$$(A\vec{x}, \vec{x}) + (A\vec{x}, \vec{y}) + (A\vec{y}, \vec{x}) + (A\vec{y}, \vec{y}) = (B\vec{x}, \vec{x}) + (B\vec{x}, \vec{y}) + (B\vec{y}, \vec{x}) + (B\vec{y}, \vec{y}) \Rightarrow$$

$$(A\vec{x}, \vec{y}) + (A\vec{y}, \vec{x}) = (B\vec{x}, \vec{y}) + (B\vec{y}, \vec{x}) \Leftrightarrow 2(A\vec{x}, \vec{y}) = 2(B\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow (A\vec{x}, \vec{y}) = (B\vec{x}, \vec{y}).$$

Последнее равенство означает, что матрицы A и B равны, поскольку $[A]_{ij} = (A\vec{e}_j, \vec{e}_i)$. $\square$

2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием. Закон инерции квадратичных форм. Пусть квадратичная форма задана равенством $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $A = A^t \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Выберем «собственный» ортонормированный базис $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$ такой, что $A\vec{f}_k = \lambda_k\vec{f}_k$, $k = 1, \dots, n$. Составим из столбцов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ матрицу $T = (f_1 \dots f_n)$. По теореме 14.6 (лекция от 11.05.2020, Гл. V, §14, п.3) матрица T ортогональна, и справедливо равенство

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Сделаем в квадратичной форме $\Phi(\vec{x})$ замену переменных $\vec{x} = T\vec{y}$:

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(T\vec{y}) = (AT\vec{y}, T\vec{y}) = (T^tAT\vec{y}, \vec{y}) = (T^{-1}AT\vec{y}, \vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.3. Для всякой квадратичной формы $\Phi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, найдется ортогональная матрица $T \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ удовлетворяющая равенству

$$\Phi(T\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть задана квадратичная форма $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $A = A^t \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Предположим, что мы нашли две обратимые матрицы $X_1, X_2 \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ удовлетворяющие условиям

$$\Phi(X_1\vec{y}) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n; \qquad (+)$$

$$\Phi(X_2\vec{z}) = \beta_1 z_1^2 + \beta_2 z_2^2 + \dots + \beta_n z_n^2, \quad \vec{z} = (z_1, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n. \qquad (++)$$

Следующая теорема устанавливает связь между этими равенствами.

Теорема 1.4. Закон инерции квадратичных форм. Число положительных коэффициентов в правой части равенства $(+)$ совпадает с числом положительных коэффициентов в правой части равенства (++). Число отрицательных коэффициентов в правой части равенства (+) совпадает с числом отрицательных коэффициентов в правой части равенства (++). Число нулевых коэффициентов в правой части равенства (+) совпадает с числом нулевых коэффициентов в правой части равенства (++).

Доказательство. Эту теорему мы приводим без доказательства. □

Число положительных коэффициентов в правой части равенства (+) обозначим через $n_+(\Phi)$, число отрицательных коэффициентов в правой части равенства (+) обозначим через $n_-(\Phi)$, число нулевых коэффициентов в правой части равенства (+) обозначим через $n_0(\Phi)$; $n_+ + n_- + n_0 = n$; числа $n_+(\Phi)$, $n_-(\Phi)$ и $n_0(\Phi)$ называются индексами инерции квадратичной формы Φ.

Если $n_+(\Phi) = n$ форму Φ называют *положительно определенной*; если $n_- = n$ — *отрицательно определенной*; если $n_0 = 0$ форму называют *невырожденной*; если $n_+ \neq 0$, $n_- \neq 0$ форму называют *знакопеременной* (или «*незнакоопределенной*»).

3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа. Дана квадратичная форма

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Наша задача найти какую-нибудь обратимую матрицу $X \in M^{n,n}(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условию

$$\Phi(X\vec{y}) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2, \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Схема решения. 1) Пусть, например, коэффициент a_{11} отличен от нуля. Выделем все слагаемые, содержащие переменную x_1,

$$\Phi(\vec{x}) = a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n}) x_1 x_n + \Phi_1(x_2, \ldots, x_n),$$
$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь через $\Phi_1(x_2, \ldots, x_n)$ обозначается квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Не ограничивая общности, можно предполагать равенства $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$; таким образом, предыдущее равенство преобретает вид

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n} x_1 x_n + \Phi_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)\right) + \Phi_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)\right)^2 + \Phi_2(x_2, \ldots, x_n), \\ &\qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$\Phi_2(x_2, \ldots, x_n) = \Phi_1(x_2, \ldots, x_n) - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2.$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y_1 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Y_1 очевидно обратима; обозначим Y_1^{-1} через X_1. После замены переменных $\vec{x} = X_1\vec{y}$ ($\vec{y} = Y_1\vec{x}$) квадратичная форма $\Phi(\vec{x})$ принимает вид

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(X_1\vec{y}) = \alpha_1 y_1^2 + \Phi_2(y_2, \ldots, y_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

2) Пусть все коэффициенты формы $\Phi(\vec{x})$ вида a_{ii} равны нулю. Предположим (например), что коэффициент a_{12} не равен нулю. Сделаем другую переменной

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \\ x_2 = \tilde{y}_1 - \tilde{y}_2 \\ x_3 = \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ x_n = \tilde{y}_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{X}_1 \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма $\Phi(\vec{x})$ принимает вид

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\tilde{X}_1\tilde{\vec{y}}) = 2a_{12}(\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) + \sum_{j=3}^{n} 2a_{1j}\tilde{y}_1\tilde{y}_n + \sum_{j=3}^{n} 2a_{1j}\tilde{y}_2\tilde{y}_n + \Phi_1(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n),$$

$$\tilde{\vec{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим форму $\Phi(\tilde{X}_1\tilde{\vec{y}})$ через $\tilde{\Phi}(\tilde{\vec{y}})$. Квадратичная форма $\tilde{\Phi}(\tilde{\vec{y}})$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\vec{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{y}_i\tilde{y}_j, \quad \tilde{\vec{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)^t \in \mathbb{R}^n; \quad \tilde{a}_{11} \neq 0.$$

Применим к форме $\tilde{\Phi}$ процедуру, описанную в предыдущем пункте и найдем обратимую матрицу $\hat{X}_1$ удовлетворяющую условию

$$\tilde{\Phi}(\hat{X}_1\vec{y}) = \tilde{\alpha}_1 y_1^2 + \Phi_2(y_2, \ldots, y_n), \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что положив $X_1 = \tilde{X}_1\hat{X}_1$ мы получим

$$\Phi(X_1\vec{y}) = \Phi(\tilde{X}_1\hat{X}_1\vec{y}) = \tilde{\Phi}(\hat{X}_1\vec{y}) = \alpha_1 y_1^2 + \Phi_2(y_2, \ldots, y_n), \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

3) Далее, повторяя процедуру для формы $\Phi_2(y_2, \ldots, y_n)$ мы получим обратимую матрицу

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ t_{32} & t_{33} & \ldots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n2} & t_{n3} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M^{n-1,n-1}(\mathbb{R}),$$

удовлетворяющую условию

$$\Phi_2(X^{(2)}\vec{z}) = \alpha_2 z_2^2 + \Phi_3(z_3, \ldots, x_n), \quad \vec{z} = (z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Определим матрицу

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & t_{32} & t_{33} & \ldots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_{n2} & t_{n3} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M^{n,n}(\mathbb{R}).$$

Остается заметить, что справедливо равенство

$$\Phi(X_1X_2\vec{z}) = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \Phi_3(z_3, \ldots, z_n), \quad \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

4) Повторяя процедуру $n-1$ раз, получим обратимую матрицу

$$X = X_1 X_2 \dots X_n$$

удовлевторяющую условию

$$\Phi(X\vec{w}) = \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2 + \ldots + \alpha_n w_n^2, \quad \vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

□

§2. Уравнения второго порядка

1. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двуми переменными. Мы рассматриваем общее уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0. \tag{1}$$

Наша цель подходящими линейными заменами переменных привести уравнение к простейшему (каноническому) виду и определить каково множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1). Здесь возможны два подхода к решению задачи. Можно требовать, чтобы преобразования координат сводились только к сдвигам и поворотам. Можно разрешить любые линейные обратимые преобразования координат и сдвиги.

В случае ортогональого преобразования координат и сдвига, мы фактически поворачиваем систему координат и сдвигаем ее на фиксированный вектор. При этом форма кривой, заданной уравнением, не меняется.

В случае произвольного линейного преобразования и сдвига, мы не только поворачиваем оси и сдвигаем начало координат, но также меняем угол между осями и меняем масштаб на осях. В этом случае форма кривой может меняться, но тип кривой не меняется.

Приведем уравнение (1) к каноническому виду.

Шаг №1. Выделим в левой части уравнения (1) квадратичную форму

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Приведем квадратичную форму Φ к сумме квадратов (ортогональным преобразованием или методом Лагранжа)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, y) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2, \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}.$$

Уравнение (1) при такой замене переменной перейдет в следующее:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1(t_{11}x_1 + t_{12}y_1) + b_2(t_{21}x_1 + t_{22}y_1) + c = 0.$$

Последнее уравнение записывается в виде

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \tilde{b}_1 x_1 + \tilde{b}_2 y_1 + c = 0. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{b}_1 = t_{11}b_1 + t_{21}b_2$, $\tilde{b}_2 = t_{12}b_1 + t_{22}b_2$.

Шаг №2. Проанализируем уравнение (2).

Случай 1. Предположим, что числа λ_1 и λ_2 — ненулевые. В таком случае в левой части уравнения (2) можно выделить два полных квадрата; уравнение (2) примет вид

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \tilde{c} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{c} = c - \left(\frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2}\right)^2$.

Сделаем еще одну замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

В новых переменных уравнение (3) запишется в виде

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \tilde{c} = 0. \tag{4}$$

а) Предположим, что числа λ_1 и λ_2 одного знака (например, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$). Если $\tilde{c} > 0$ уравнение (1) задает пустое множество (на плоскости нет точек, координаты которых удовлетворяли бы уравнению (1)). Если $\tilde{c} < 0$, то уравнение (4) (а значит и уравнение (1)) задает эллипс. Если $\tilde{c} = 0$, то уравнение (4) задает одну единственную точку на плоскости.

б) Предположим, что числа λ_1 и λ_2 разных знаков (например, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$). При $\tilde{c} \neq 0$ уравнение (4) задает гиперболу; при $\tilde{c} = 0$ уравнение (4) задает пару пересекающихся прямых.

Случай 2. Предположим, что выполнено условие $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Уравнение (2) примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \tilde{b}_1 x_1 + \tilde{b}_2 y_1 + c = 0.$$

В левой части последнего уравнения выделим полный квадрат; уравнение (2) запишется в виде

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \tilde{b}_2 y_1 + \tilde{c} = 0. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{c} = c - \left(\frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}\right)^2$.

Сделаем еще одну замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В новых переменных уравнение (5) запишется в виде

$$\lambda_1 x_2^2 + \tilde{b}_2 y_2 + \tilde{c} = 0. \tag{6}$$

а) Если коэффициент $\tilde{b}_2$ не равен нулю, сделаем замену

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{c}/\tilde{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ \tilde{c}/\tilde{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6) после замены переменных приобретет вид

$$\lambda_1 x_3^2 + \tilde{b}_2 y_3 = 0.$$

Это уравнение задает параболу.

б) Если коэффициент $\tilde{b}_2$ равен нулю, то уравнение (6) имеет вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \tilde{c} = 0.$$

Если $\lambda_1\tilde{c} > 0$, то последнее уравнение задает пустое множество. Если $\lambda_1\tilde{c} < 0$, то последнее уравнение задает две параллельные прямые. Наконец, если $\tilde{c} = 0$, то последнее уравнение задает одну прямую.

2. Поверхности второго порядка. Здесь мы приведем список канонических уравнений, к которым сводится любое уравнение второго порядка с тремя переменными. Мы дадим названия поверхностей, которые задают эти уравнения. Рисунки поверхностей будут приведены в другом месте.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; эллипсоид.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; однополостной гиперболоид.

3) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; двухполостной гиперболоид.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$; конус.

5) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; эллиптический параболоид.

6) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; гиперболический параболоид.

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; эллиптический цилиндр.

8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; гиперболический цилиндр.

9) $y^2 = 2px$; параболический цилиндр.

10) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; пара пересекающихся плоскостей.

11) $\frac{x^2}{a^2} = 1$; пара параллельных плоскостей.

12) $x^2 = 0$; плоскость.

13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$; одна прямая в пространстве.

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; точка в пространстве.

15) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$; пустое множество.

16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$; пустое множество.

17) $\frac{x^2}{a^2} = -1$; пустое множество.

3. Схема приведения к каноническому виду уравнения второго порядка с тремя переменными. Здесь мы используем те же соображения, что и в п.1. Уравнение второго порядка с тремя переменными имеет вид

$$\Phi(x, y, z) + a_1x + a_2y + a_3z + c = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi(x, y, z)$ — квадратичная форма от трех переменных.

Наша цель подходящими линейными заменами переменных привести уравнение к простейшему (каноническому) виду и определить каково множество точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению (1). Здесь возможны два подхода к решению задачи. Можно требовать, чтобы преобразования координат сводились только к сдвигам и поворотам. Можно разрешить любые линейные обратимые преобразования координат и сдвиги.

В случае ортогонального преобразования координат и сдвига, мы фактически поворачиваем систему координат и сдвигаем ее на фиксированный вектор. При этом форма поверхности, заданной уравнением, не меняется.

В случае произвольного линейного преобразования и сдвига, мы не только поворачиваем оси и сдвигаем начало координат, но также меняем углы между осями и меняем масштаб на осях. В этом случае форма поверхности может меняться, но тип поверхности не меняется.

Приведем уравнение (1) к каноническому виду. Ортогональным преобразованием или методом Лагранжа приводим квадратичную форму к сумме квадратов. Уравнение (1) записывается в виде

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + \lambda_3z_1^2 + b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 + c = 0. \tag{2}$$

Случай №1. Если все три числа λ_1, λ_2 и λ_3 — ненулевые, то выделяя в левой части (2) полные квадраты и делая сдвиг по всем переменным, мы приходим к уравнению

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3z_2^2 + d = 0. \tag{3}$$

Далее, в зависимости от знаков коэффициентов, мы приходим к каноническим уравнениям типов $1 - 4$ и типов 14, 15.

Случай №2. Если числа λ_1 и λ_2 — ненулевые и $\lambda_3 = 0$, то выделяя в левой части (2) полные квадраты и делая сдвиг по первым двум переменным, мы приходим к уравнению

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 + b_3z_2 + d = 0.$$

Если $b_3 = 0$, то в зависимости от знаков коэффициентов мы приходим к каноническим уравнениям типов 7, 8, 10, 13, 16. Если $b_3 \neq 0$, то делая сдвиг по третьей переменной мы приходим к уравнению

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 + b_3z_2 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов мы получим уравнения типов 5 и 6.

Случай №3. Предположим $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; выделяя в левой части (2) полный квадрат и делая сдвиг по первой переменной, мы приходим к уравнению

$$\lambda_1x_2^2 + b_2y_2 + b_3z_2 + d = 0. \tag{4}$$

Предположим, сначала, что оба коэффициента b_2 и b_3 не равны нулю. Сделаем преобразование координат

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \\ y_3 = b_2 y_2 + b_3 z_2 \\ z_3 = z_2 \end{cases}, \quad \text{либо поворот} \begin{cases} x_3 = x_2 \\ y_3 = \cos\varphi\, y_2 - \sin\varphi\, z_2 \\ z_3 = \sin\varphi\, y_2 + \cos\varphi\, z_2 \end{cases}$$

В случае поворота угол φ подберем из уравнения $-b_2 \sin\varphi z_2 + b_3 \cos\varphi z_2 = 0$. В любом случае, после преобразования координат уравнение (4) примет вид

$$\lambda_1 x_3^2 + e y_3 + f = 0. \tag{5}$$

Если коэффициент e равен нулю, то мы приходим к каноническим уравнениям типов 11, 12 и 17. Если коэффициент e неравен нулю, то делая сдвиг по второй переменной мы получаем уравнение

$$\lambda_1 x_4^2 + e y_4 = 0, \tag{6}$$

и приходим к уравнению вида 9.

Если же хотя бы один из коэффициентов b_2 и b_3 равен нулю, то мы снова приходим к уравнениям (5) и (6).