Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 19.03.2020

§2. Подпространство линейного пространства

1. Определение подпространства; простейшие свойства подпространства. Примеры подпространств. Базис и размерность подпространства.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F — непустое подмножество пространства E ($\varnothing \neq F \subset E$). Тогда F называют подпространством пространства E, если выполнены два условия

- для любых векторов $x, y \in F$ справедливо включение $x + y \in F$,
- для любого вектора $x \in F$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$ верно включение $\alpha x \in F$.

Упр.

1) $\mathbb{O}_E \in F$;
2) Если $x \in F$, то $(-x) \in F$;
3) Подпространство F является линейным пространством, относительно операций сложения и умножения на число, определенных на E;
4) $\{\mathbb{O}_E\}$ — подпространство в E; E — подпространство в E.

Лемма 2.1 Пусть $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$ — произвольная матрица. Тогда множество решений однородного уравнения $A\vec{z} = \vec{0}$:

$$F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : A\vec{z} = \vec{0}\}$$

является подпространством в $\mathbb{K}^n$.

Доказательство.

1) Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}$ принадлежат множесту F, т.е. $A\vec{x} = \vec{0}$, $A\vec{y} = \vec{0}$. Тогда справедливы очевидные соотношения $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$; таким образом $\vec{x} + \vec{y} \in F$.
2) Пусть $\alpha \in \mathbb{K}$ — произвольное число; вектор $\vec{x}$ принадлежит множеству F (т.е. $A\vec{x} = \vec{0}$). Тогда справедливо $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\vec{0} = \vec{0}$; таким образом $\alpha\vec{x} \in F$.

$\square$

Примеры.

1) Пусть $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$, $F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : A\vec{z} = \vec{0}\}$. Тогда F — подпространство в $\mathbb{K}^n$. В частности, подпространствами в $\mathbb{K}^n$ являются следующие множества:

$$F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : z^1 = 0\},$$
$$F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : z^1 = z^2 = \cdots = z^{n-1} = 0\},$$
$$F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : z^1 + z^2 + \cdots + z^n = 0\},$$
$$F := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : z^1 = z^2 = \cdots = z^{n-1}\}$$

и т.п.

2) Пусть в пространстве выделена точка O. Пусть E_3 — множество произвольных радиус-векторов с началом в точке O. Мы знаем, что E_3 вещественное линейное пространство. Выберем прямую l и плоскость α, проходящие через точку O. Обозначим через E_l множество рудиус-векторов с началом в точке O, лежащих на прямой l. Через E_α обозначим множество радиус-векторов с началом в точке O, лежащих в плоскости α. Нетрудно видеть, что E_l и E_α — подпространства в E_3. Более того, если $l \subset \alpha$, то E_l подпространство в E_α.
3) Пусть $E = M^{n,n}(\mathbb{K})$; тогда $F = \{A \in E : \mathrm{Tr} A = 0\}$ подпространство в E.
4) Пусть $E = \Omega_n(\mathbb{K})$, $x_0 \in \mathbb{R}$; тогда $F = \{P \in E : P(x_0) = 0\}$ — подпространство в E.

Теорема 2.2 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim E = n$, F — подпространство в E. Тогда

1) F — конечномерное линейное пространство.
2) Справедливы неравенства $0 \leqslant \dim F \leqslant n$.
3) $\dim F = 0$ в том и только в том случае, если $F = \{\mathbb{O}\}$.
4) $\dim F = n$ в том и только в том случае, если $F = E$.

Доказательство.

1) Предположим, что F не является конечномерным, т.е. для всякого $N \in \mathbb{N}$ можно указать линейно независимый набор векторов $\{f_k\}_{k=1}^N \subset F$. В этом случае мы нашли линейно независимый набор $\{f_k\}_{k=1}^N \subset E$, а потому $N \leqslant n$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, пространство F — конечномерно.
2) Как и выше для всякого линейно независимого набора $\{f_k\}_{k=1}^N \subset F$ справедливо неравенство $N \leqslant n$. Следовательно, либо $F = \{\mathbb{O}\}$, либо найдется линейно независимый набор $\{f_k\}_{k=1}^{N_0} \subset F$ максимальной длины $N_0 \leqslant n$. По определению это и есть базис в F, $N_0 = \dim F$. Таким образом, справедливы неравенства $0 \leqslant \dim F \leqslant n$.
3) $\dim F = 0 \Longleftrightarrow F = \{\mathbb{O}\}$ по определению.
4) Разумеется, всегда справедливо включение $F \subset E$, и если $F = E$, то $\dim F = \dim E = n$. Если же наоборот верно равенство $\dim F = n$, то значит в F найдется базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, но тогда этот набор линейно независим в E, а потому это базис в E. Следовательно, всякий вектор x из E может быть представлен в виде $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, а потому принадлежит F. Таким образом, $E = F$.

$\square$

2. Линейная оболочка.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\{f_k\}_{k=1}^N \subset E$ — произвольный конечный набор векторов из E. Линейной оболочкой набора векторов $\{f_k\}_{k=1}^N$ называется множество

$$\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} := \{x = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k \in E, \quad \{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{K}\}.$$

Лемма 2.3 $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$ — подпространство в E.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$, т.е. $x = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k$, $y = \sum_{k=1}^N \beta_k f_k$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{K}$, $\{\beta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{K}$. Тогда вектор $x + y$ имеет вид $\sum_{k=1}^N (\alpha_k + \beta_k) f_k$, а значит тоже принадлежит множеству $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$. Аналогично, при всяком $\alpha \in \mathbb{K}$ вектор αx имеет вид $\sum_{k=1}^N (\alpha \cdot \alpha_k) f_k$ и принадлежит множеству $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$. □

Свойство. $\{f_k\}_{k=1}^N \subset \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$.

Доказательство. Например, $f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \dots + 0 \cdot f_N \in \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$. Аналогично проверяются остальные включения. □

Примеры.

1) Пусть в пространстве выделена точка O; $\vec{j} \neq \vec{0}$ — некоторый радиус-вектор с началом в точке O, l — приямая, содержащая вектор $\vec{j}$. Тогда $\mathscr{L}\{\vec{j}\}$ — это подпространство E_l.
2) Пусть в пространстве выделена точка O; $\vec{i}, \vec{j}$ — некоторые неколлинеарные радиус-векторы с началом в точке O, α — плоскость, содержащая векторы $\vec{i}, \vec{j}$. Тогда $\mathscr{L}\{\vec{i}, \vec{j}\}$ — это подпространство E_α.
3) Пусть в пространстве выделена точка O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — некоторые некомпланарные радиус-векторы с началом в точке O. Тогда $\mathscr{L}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — это пространство E_3.
4) Пусть E — линейное пространство над $\mathbb{K}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — базис в E. Тогда $\mathscr{L}\{e_k\}_{k=1}^n = E$.

Лемма 2.4 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\{f_k\}_{k=1}^N, \{g_l\}_{l=1}^M \subset E$ — произвольные конечные наборы векторов из E. При этом справедливы включения $f_k \in \mathscr{L}\{g_l\}_{l=1}^M$, $k = 1, \dots, N$. Тогда $\mathscr{L}\{f_k\}_{k=1}^N \subset \mathscr{L}\{g_l\}_{l=1}^M$.

Доказательство. Каждый вектор f_k, $k = 1, \dots, N$, может быть представлен в виде

$$\begin{cases} f_1 = a_{11} g_1 + \dots + a_{1M} g_M, \\ \vdots \\ f_N = a_{N1} g_1 + \dots + a_{NM} g_M. \end{cases}$$

Следовательно, для всякого вектора $x \in \mathscr{L}\{f_k\}_{k=1}^N$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_N f_N = \\ = \alpha_1 (a_{11} g_1 + \dots + a_{1M} g_M) + \dots + \alpha_N (a_{N1} g_1 + \dots + a_{NM} g_M) = \\ = (a_{11} \alpha_1 + \dots + a_{N1} \alpha_N) g_1 + \dots + (a_{1M} \alpha_1 + \dots + a_{NM} \alpha_N g_M), \end{aligned}$$

откуда и вытекает утверждение леммы. □

Из леммы 2.4 немедленно вытекают следующие два утверждения.

Следствие 2.5 Если $\{f_k\}_{k=1}^N \subset \{g_l\}_{l=1}^M$, то $\mathscr{L}\{f_k\}_{k=1}^N \subset \mathscr{L}\{g_l\}_{l=1}^M$.

Следствие 2.6 Пусть $f_N = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k f_k$. Тогда $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} = \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_{N-1}\}$.

Из следствий 2.5, 2.6 нетрудно вывести следующее.

Теорема 2.7 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\{f_k\}_{k=1}^N \subset E$ — произвольный конечный набор векторов из E. Тогда либо $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} = \{\mathbb{O}\}$ либо базисом в $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$ является линейно независимый поднабор векторов из $\{f_1, \dots, f_N\}$ максимальной длины.

Доказательство. 1) Если набор $\{f_1, \dots, f_N\}$ линейно независим, то это базис в $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$ по признаку базиса. Теорема доказана.

2) Если набор векторов $\{f_1, \dots, f_N\}$ линейно зависим, то один из векторов (например f_N) может быть выражен через все остальные. Выбросим этот вектор f_N. При этом (см. следствие 2.6) линейная оболочка векторов не изменится. Если получившийся набор линейно независим, то это искомый базис. Если получившийся набор линейно зависим, найдем новый вектор, выражающийся через все остальные и продолжим процедуру. За конечное число шагов мы либо придем к линейно независимому набору, который и будет базисом в линейной оболочке $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$, либо обнаружим, что $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$ является «нулевым» подпространством. $\square$

Из теоремы 2.7 мгновенно вытекает

Следствие 2.8 Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim E = n$; $\{f_k\}_{k=1}^N \subset E$ — произвольный конечный набор векторов из E. Тогда

- Если набор $\{f_1, \dots, f_N\}$ линейно независим, то он является базисом в $\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\}$.
- $\dim \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} \leqslant N$.
- $\dim \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} \leqslant n$.