Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 23.03.2020

Пример. Пусть в пространстве выделена точка O, E_3 — пространство всевозможных радиус-векторов, с началом в точке O. Тогда любое подпространсво в E_3 — это

(1) • либо $\{\mathbb{O}\}$;

(2) • либо E_l — пространство радиус-векторов, лежащих на некоторой прямой l, проходящей через точку O;

(3) • либо E_α — пространство радиус-векторов, лежащих на некоторой плоскости α, проходящей через точку O;

(4) • либо все E_3.

Доказательство. По теореме 2.2 размерность подпространства может быть $0, 1, 2, 3$. Если размерность нулевая, то подпространство совпадает с $\{\mathbb{O}\}$; если размерность равна 3, то подпростравнство совпадает с E_3.

Если размерность подпространства равна 2, то подпространство имеет базис $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Подпространство есть линейная оболочка векторов $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, т.е. это подпространство E_α, где α — плоскость, содержащая векторы $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Если размерность подпространства равна 1, то подпространство имеет базис $\{\vec{i}\}$. Подпространство есть линейная оболочка вектора $\vec{i}$, т.е. это подпространство E_l, где l — прямая, содержащая вектор $\vec{i}$. □

3. Пересечение и линейная сумма подпространств.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F, G — подпространства в E. Определим пересечение и линейную сумму подпространств F и G равенствами

$$F \cap G := \{x \in E \,:\, x \in F, x \in G\};$$

$$F + G := \{x \in E \,:\, x = f + g,\ f \in F, g \in G\}.$$

Свойство. $F \cap G$, $F + G$ — подпространства в E.

Доказательство. 1) Пусть справедливы соотношения $x, y \in F \cap G$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Следовательно, (т.к. F и G подпространства в E) верно:

$$x + y \in F, \quad \alpha x \in F, \quad x + y \in G, \quad \alpha x \in G.$$

Таким образом, $x + y \in F \cap G$, $\alpha x \in F \cap G$.

2) Пусть выполнены условия $x, y \in F + G$, $\alpha \in \mathbb{K}$; т.е.

$$x = f_1 + g_1, \quad f_1 \in F, \quad g_1 \in G; \quad y = f_2 + g_2, \quad f_2 \in F, \quad g_2 \in G; \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Тогда очевидны равенства:

$$x + y = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2), \quad f_1 + f_2 \in F, \quad g_1 + g_2 \in G;$$

$$\alpha x = \alpha f_1 + \alpha g_1, \quad \alpha f_1 \in F, \quad \alpha g_1 \in G;$$

которые и приводят к соотношениям $x + y \in F + G$, $\alpha x \in F + G$. $\square$

Примеры.

1) Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $\{f_1, \dots, f_N\} \subset E$, $\{g_1, \dots, g_M\} \subset E$. Тогда (в силу определения линейной оболочки)

$$\mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N\} + \mathscr{L}\{g_1, \dots, g_M\} = \mathscr{L}\{f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M\}.$$

2) Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_{l_1}$, $G = E_{l_2}$, где l_1 и l_2 — прямые имеющие единственную точку пересечения — точку O. Тогда справедливы соотношения

$$F \cap G = \{\mathbb{O}\}, \quad F + G = E_\alpha,$$

где α — плоскость, содержащая прямые l_1 и l_2.

3) Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_l$, $G = E_\alpha$, где l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость, содержащая прямую l. Тогда справедливы соотношения

$$F \cap G = F, \quad F + G = G.$$

4) Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_l$, $G = E_\alpha$, где l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость, пересекающая прямую l в единственной точке O. Тогда справедливы соотношения

$$F \cap G = \{\mathbb{O}\}, \quad F + G = E_3.$$

Теорема 2.9 Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F, G — подпространства в E. Тогда справедливо равенство

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Доказательство. Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^p$ в подпространстве $F \cap G$. Достроим этот набор до базиса $\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_N\}$ в подпространстве F. Аналогично можно дополнить набор $\{e_k\}_{k=1}^p$ до базиса $\{e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_M\}$ в G. Проверим, что набор

$$\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M\}$$

есть базис в $F + G$.

Действительно, для всякого вектора $x \in F + G$ справедливо разложение

$$x = f + g, \text{ где } f = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_N f_N \in F$$
$$g = \gamma_1 e_1 + \dots \gamma_p e_p + \delta_1 g_1 + \dots + \delta_M g_M \in G.$$

Следовательно справедливо равенство

$$x = (\alpha_1 + \gamma_1) e_1 + \dots (\alpha_p + \gamma_p) e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_N f_N + \delta_1 g_1 + \dots + \delta_M g_M.$$

Остается проверить, что набор $\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M\}$ динейно независим.

Действительно, предположим выполнение равенства

$$\tilde{\alpha}_1 e_1 + \dots \tilde{\alpha}_p e_p + \tilde{\beta}_1 f_1 + \dots + \tilde{\beta}_N f_N + \tilde{\gamma}_1 g_1 + \dots + \tilde{\gamma}_M g_M = \mathbb{O}.$$

Следовательно справедливо соотношение

$$\tilde{\gamma}_1 g_1 + \dots + \tilde{\gamma}_M g_M = -\left(\tilde{\alpha}_1 e_1 + \dots \tilde{\alpha}_p e_p + \tilde{\beta}_1 f_1 + \dots + \tilde{\beta}_N f_N\right).$$

Очевидно левая часть последнего равенства принадлежит подпространству G, а правая — подпространству F. Таким образом, обе части последнего равенства принадлежат подпространству $F \cap G$, а потому справедливы соотношения

$$\tilde{\gamma}_1 g_1 + \dots + \tilde{\gamma}_M g_M = \tilde{\delta}_1 e_1 + \dots + \tilde{\delta}_p e_p;$$

$$\tilde{\alpha}_1 e_1 + \dots \tilde{\alpha}_p e_p + \tilde{\beta}_1 f_1 + \dots + \tilde{\beta}_N f_N = \tilde{\omega}_1 e_1 + \dots + \tilde{\omega}_p e_p.$$

Последние же переписываются в виде

$$\tilde{\delta}_1 e_1 + \dots + \tilde{\delta}_p e_p - \tilde{\gamma}_1 g_1 - \dots - \tilde{\gamma}_M g_M = \mathbb{O};$$

$$(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\omega}_1) e_1 + \dots (\tilde{\alpha}_p - \tilde{\omega}_p) e_p + \tilde{\beta}_1 f_1 + \dots + \tilde{\beta}_N f_N = \mathbb{O}.$$

Откуда в силу линейной независимости наборов

$$\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_N\}, \quad \{e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_M\}$$

вытекают равенства $\tilde{\beta}_1 = \dots = \tilde{\beta}_N = \tilde{\gamma}_1 = \dots \tilde{\gamma}_M = 0$. Теперь исходное равенство

$$\tilde{\alpha}_1 e_1 + \dots \tilde{\alpha}_p e_p + \tilde{\beta}_1 f_1 + \dots + \tilde{\beta}_N f_N + \tilde{\gamma}_1 g_1 + \dots + \tilde{\gamma}_M g_M = \mathbb{O}$$

переписывается в виде

$$\tilde{\alpha}_1 e_1 + \dots \tilde{\alpha}_p e_p = \mathbb{O},$$

что приводит к $\tilde{\alpha}_1 = \dots = \tilde{\alpha}_p = 0$.

Итак набор $\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M\}$ является базисом в $F + G$. Таким образом справедливы равенства

$$\dim(F + G) = p + N + M = (p + N) + (p + M) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

$\square$

4. Подпространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$ — фиксированная матрица; подпространство F_A в пространстве $\mathbb{K}^n$ определим равенством

$$F_A := \{\vec{z} \in \mathbb{K}^n : A\vec{z} = \vec{0}\}.$$

Теорема 2.10 Пусть $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$ — фиксированная матрица, $r = \mathrm{rank} A$; $\{\vec{z}_k\}_{k=1}^{p}$ — фундаментальная система решений для системы уравнений $A\vec{z} = \vec{0}$. Тогда $p = n - r$, $\{\vec{z}_k\}_{k=1}^{n-r}$ — базис в F_A, $\dim F_A = n - r$.

Доказательство. По определению, фундаментальной ситемой решений мы называем линейно независимый набор векторов $\{\vec{z}_k\}_{k=1}^{p}$, каждый из которых является решением системы $A\vec{x} = \vec{0}$, и такой, что всякое решение системы $A\vec{x} = \vec{0}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\{\vec{z}_k\}_{k=1}^{p}$. По признаку базиза набор векторов $\{\vec{z}_k\}_{k=1}^{p}$ является базисом в F_A. С другой стороны методом Гаусса явно строится фундаментальная система решений длины $n - r$. По теореме о длине базиса справедливо равенство $p = n - r$. $\square$

5. Прямая сумма подпространств.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F и G — подпространства в E. Сумма подпространств $F + G$ называется прямой, если для всякого вектора $x \in F + G$ представление

$x = f + g$, $f \in F$, $g \in G$ единственно. Иными словами, из равенства $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, где $f_1, f_2 \in F$, $g_1, g_2 \in G$, должны вытекать соотношения $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$.

Теорема 2.11 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F и G — подпространства в E. Тогда сумма подпространств $F + G$ является прямой в том и только в том случае, если $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$.

Доказательство. 1) Пусть сумма $F + G$ — приямая. Проверим равенство $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$. Действительно, если справедливы включения $x \in F$, $x \in G$, то вектор x имеет два представления

$$x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2, \text{ где } f_1 = x \in F, \ g_1 = \mathbb{O} \in G, \ f_2 = \mathbb{O} \in F, \ g_2 = x \in G.$$

Тогда справедливо равенство $f_1 = f_2$, т.е. $x = \mathbb{O}$. Таким образом $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$.

2) Пусть справедливо равенство $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$. Проверим, что сумма $F + G$ — прямая. Действительно, если справедливо равенство $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, где $f_1, f_2 \in F$, $g_1, g_2 \in G$, то верно соотношение $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Правая часть последнего равенства принадлежит подпространству G, левая часть — подпространству F. Таким образом справедливы включения $f_1 - f_2, g_2 - g_1 \in F \cap G = \{\mathbb{O}\}$. Следовательно $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = \mathbb{O}$. Сумма $F + G$ — прямая. □

Обозначение. Если сумма $F + G$ — прямая, мы будем обозначать ее $F \dot{+} G$.

Из теорем 2.9, 2.11 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.12 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F и G — подпространства в E и сумма $F + G$ — прямая; $\{f_1, \dots, f_N\}$ — базис в подпространстве F, $\{g_1, \dots, g_M\}$ — базис в подпространстве G. Тогда объединение базисов в F и G $\{f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M\}$ есть базис в $F \dot{+} G$, и справедливо равенство $\dim(F \dot{+} G) = \dim F + \dim G$.

Упр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F, G и H — подпространства в E. Проверьте равенство

$$(F + G) + H = F + (G + H).$$

Обозначение. Всюду ниже подразумевается $F + G + H := F + (G + H)$. Сумма подпространств $F_1 + \dots + F_p$ называется прямой, если для всякого $x \in F_1 + \dots + F_p$ представление $x = \sum_{k=1}^{p} f_k$, $f_k \in F_k$, $k = 1, \dots, p$, единственно. В этом случае сумма обозначается $F_1 \dot{+} \dots \dot{+} F_p$.

Примеры.

- Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_{l_1}$, $G = E_{l_2}$, где l_1 и l_2 — прямые имеющие единственную точку пересечения — точку O. Тогда справедливы соотношения

  $$F \cap G = \{\mathbb{O}\}, \quad F \dot{+} G = E_\alpha,$$

  где α — плоскость, содержащая прямые l_1 и l_2.

- Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_l$, $G = E_\alpha$, где l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость, пересекающая прямую l в единственной точке O. Тогда справедливы соотношения

  $$F \cap G = \{\mathbb{O}\}, \quad F \dot{+} G = E_3.$$

- Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_\alpha$, $G = E_\beta$, где α, β — несовпадающие плоскости, проходящие через точку O и пересекающиеся по прямой l. Тогда справедливы соотношения

$$F \cap G = E_l, \quad F + G = E_3.$$

- Пусть в пространстве выделена точка O; l_1, l_2, l_3 — три некомпланарные прямые, пересекающиеся в точке O; $F_k = E_{l_k}$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $F_1 \dot{+} F_2 \dot{+} F_3 = E_3$. (Проверьте, что сумма — прямая).

6. Прямое дополнение подпространства.

Опр. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F и G — подпространства в E, сумма $F + G$ — прямая и совпадает с E. Тогда подпространство G называется прямым дополнением к подпространству F.

Теорема 2.13 Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — подпространство в E. Тогда существует прямое дополнение к F.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $\{f_1, \ldots, f_N\}$ в подпространстве F. Дополним его до базиса $\{f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M\}$ в пространстве E. Положим G равным линейной оболочке $\mathscr{L}\{g_1, \ldots, g_M\}$. Проверим, что G — прямое дополнение к подпространству F.

Действительно, во-первых справедливы равенства

$$F + G = \mathscr{L}\{f_1, \ldots, f_N\} + \mathscr{L}\{g_1, \ldots, g_M\} = \mathscr{L}\{f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M\} = E.$$

Во-вторых если $x \in F \cap G$, то x допускает представления

$$x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k = \sum_{l=1}^{M} \beta_l g_l,$$

а значит выполнено равенство

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_N f_N - \beta_1 g_1 - \cdots - \beta_M g_M = \mathbb{O}.$$

Из последнего равенства (в силу линейной независимости набора $\{f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M\}$) вытекает $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = \beta_1 = \cdots = \beta_M = \mathbb{O}$, т.е. $x = \mathbb{O}$. Таким образом справедливо соотношение $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$. $\square$

Пример. Пусть в пространстве выделена точка O; $F = E_l$, $G = E_\alpha$, где α — плоскость, содержащая точку O, l — прямая, проходящая через точку O и не лежащая в плоскости α. Тогда E_l — прямое дополнение к подпространству E_α. Поскольку прямых l, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям бесконечно много, прямое дополнение не единственно.