Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 23.04.2020

§8. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве

1. Транспонирование линейного оператора в вещественном евклидовом пространстве.

Лемма 8.1. Пусть E — вещественное конечномерное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E, $a_{ij} := (\mathbb{A}e_j, e_i)$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По теореме 1.2 (лекция от 09.04.2020, Гл. V, §1, п.3) вектор $\mathbb{A}e_j$ раскладывается по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$ следующим образом

$$\mathbb{A}e_j = \sum_{i=1}^n (\mathbb{A}e_j, e_i)e_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, j-м столбцом изображающей матрицы (см. лекцию от 26.04.2020, Гл.IV, §3, п.6) оператора $\mathbb{A}$ является вектор

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{A}e_j, e_1) \\ (\mathbb{A}e_j, e_2) \\ \vdots \\ (\mathbb{A}e_j, e_n) \end{pmatrix},$$

что и доказывает нашу лемму. □

Теорема 8.2. Пусть E — вещественное конечномерное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$. Тогда существует единственный оператор $\mathbb{B} \in \Lambda(E)$, удовлетворяющий условию

$$\forall x, y \in E \ \ (\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{B}y). \qquad (+)$$

Доказательство. Проверим существование. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. Определим оператор $\mathbb{B} \in \Lambda(E)$ на векторах базиса:

$$\mathbb{B}e_j = \sum_{i=1}^n (e_j, \mathbb{A}e_i)e_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

По теореме 5.1 такой оператор $\mathbb{B}$ существует и единственен. Отметим равенство

$$(e_k, \mathbb{B}e_j) = \sum_{i=1}^n \left(e_k, (e_j, \mathbb{A}e_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^n (e_j, \mathbb{A}e_i)\,(e_k, e_i) = (e_j, \mathbb{A}e_k) = (\mathbb{A}e_k, e_j).$$

Осталось показать, что построенный оператор $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию (+). В самом деле

$$\forall x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in E, \quad y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \in E \ \ (x, \mathbb{B}y) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, \mathbb{B}e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\mathbb{A}e_i, e_j) = (\mathbb{A}x, y).$$

Проверим единственность. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. Пусть линейные операторы $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ удовлетворяют условию (+). Тогда по Лемме 8.1 они изображаются одинаковыми матрицами в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. Следовательно, по теореме 3.5 (лекция от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6), операторы $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ совпадают. $\square$

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Lambda(E)$,

$$\forall x, y \in E \ \ (\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{B}y).$$

Тогда оператор $\mathbb{B}$ обозначается через $\mathbb{A}^t$ и называется транспонированным к оператору $\mathbb{A}$.

Свойства.

1) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^t = \mathbb{A}^t + \mathbb{B}^t$.

   Доказательство.

$$((\mathbb{A}+\mathbb{B})x, y) = (\mathbb{A}x, y) + (\mathbb{B}x, y) = (x, \mathbb{A}^t y) + (x, \mathbb{B}^t y) = (x, (\mathbb{A}^t + \mathbb{B}^t)y).$$

$\square$

2) $(\alpha\mathbb{A})^t = \alpha(\mathbb{A}^t)$.

   Доказательство.

$$(\alpha\mathbb{A}x, y) = \alpha(x, \mathbb{A}^t y) = (x, \alpha\mathbb{A}^t y).$$

$\square$

3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t$.

   Доказательство.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B}x, y) = (\mathbb{B}x, \mathbb{A}^t y) = (x, \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t y).$$

$\square$

4) $(\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}$.

   Доказательство.

$$(\mathbb{A}^t x, y) = (y, \mathbb{A}^t x) = (\mathbb{A}y, x) = (x, \mathbb{A}y).$$

$\square$

5) $I^t = I$.
6) $\mathbb{O}^t = \mathbb{O}$.
7) $(\mathbb{A}^t x, y) = (x, \mathbb{A}y)$.

   Доказательство.

$$(\mathbb{A}^t x, y) = (y, \mathbb{A}^t x) = (\mathbb{A}y, x) = (x, \mathbb{A}y).$$

$\square$

8) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E; оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ изображается матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6). Тогда оператор $\mathbb{A}^t$ изображается матрицей A^t в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. Пусть оператор $\mathbb{A}^t$ изображается матрицей B в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. По лемме 8.1 справедливы равенства

$$[B]_{ij} = (\mathbb{A}^t e_j, e_i) = (e_j, \mathbb{A}e_i) = [A]_{ji}.$$

□

9) $\det\mathbb{A}^t = \det\mathbb{A}$.

   Доказательство. Из свойства 8. □

10) $\mathrm{Tr}\mathbb{A}^t = \mathrm{Tr}\mathbb{A}$.

   Доказательство. Из свойства 8. □

11) $\mathrm{rank}\mathbb{A}^t = \mathrm{rank}\mathbb{A}$.

   Доказательство. Как следует из теоремы 3.5 (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6) и свойства 1 (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.7), ранг оператора совпадает с рангом изображающей его матрицы, ранг же матрицы при транспонировании не меняется. □

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство; тогда оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ называется симметричным, если $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}$.

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство; тогда оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ называется антисимметричным, если $\mathbb{A}^t = -\mathbb{A}$.

Свойства.

1) Для любого оператора $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ оператор $\mathbb{A}_s := \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^t)$ — симметричный.
2) Для любого оператора $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ оператор $\mathbb{A}_a := \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^t)$ — антисимметричный.
3) Каждый оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ раскладывается в сумму симметричного и антисимметричного $\mathbb{A} = \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_a$.

2. Теорема об образе оператора и ядре транспонированного оператора в вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 8.3. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство; тогда для всякого $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ справедливо разложение

$$\mathrm{Ran}\mathbb{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = E$$

Доказательство.

$$z \in (\mathrm{Ran}\mathbb{A})^\perp \Leftrightarrow \forall f \in \mathrm{Ran}\mathbb{A} \;\; (z, f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E \;\; (z, \mathbb{A}x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in E \;\; (\mathbb{A}^t z, x) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}^t z = \mathbb{O} \Leftrightarrow z \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t.$$

□

Следствия теоремы 8.3. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство; тогда для всякого $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ справедливы следующие утверждения.

1) $\mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
2) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A}^t = E$.

3) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
4) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f \perp \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t$.
5) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}^t x = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение.
6) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}x = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение.
7) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = \{\mathbb{O}\}$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) и 5) следуют непосредственно из теоремы 8.3. Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и соотношений

$$\mathrm{dim}\mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A}^t = \mathrm{dim}\mathrm{Ran}\mathbb{A}^t.$$

Утверждение 4) является переформулировкой теоремы 8.3. Утверждение 6) следует из утверждения 3). Утверждение 7) вытекает из утверждений 1) и 3). □

Отметим, что шестое следствие фактически является альтернативой Фредгольма для операторов в конечномерном вещественном евклидовом пространстве.

3. Изометрический оператор в вещественном евклидовом пространстве.

Опр. Пусть E — вещественное евклидово пространство; оператор $\mathbb{V} \in \Lambda(E)$ называется изометрическим, если при всех $x \in E$ справедливо равенство $\|\mathbb{V}x\| = \|x\|$.

Теорема 8.4. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство; $\mathbb{V} \in \Lambda(E)$. Тогда следующие факты эквивалентны:

(i) $\mathbb{V}$ — изометрический;
(ii) при всех $x, y, \in E$ справедливо равенство $(\mathbb{V}x, \mathbb{V}y) = (x, y)$;
(iii) $\mathbb{V}^t\mathbb{V} = I$;
(iv) $\mathbb{V}\mathbb{V}^t = I$;
(v) оператор $\mathbb{V}$ — биекция, и справедливо равенство $\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^t$.

Доказательство.

(i)⇒(ii) При всех $x, y \in E$ справедливы соотношения

$$\|\mathbb{V}(x+y)\| = \|(x+y)\| \Leftrightarrow \|\mathbb{V}(x+y)\|^2 = \|(x+y)\|^2 \Leftrightarrow$$
$$\|Vx\|^2 + 2(\mathbb{V}x, \mathbb{V}y) + \|\mathbb{V}y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \Rightarrow (\mathbb{V}x, \mathbb{V}y) = (x, y).$$

(ii)⇒(iii) Зададим ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. При всех $x, y \in E$ справедливы равенства

$$(\mathbb{V}^t\mathbb{V}x, y) = (\mathbb{V}x, \mathbb{V}y) = (x, y) = (Ix, y).$$

Следовательно, по лемме 8.1, операторы $\mathbb{V}^t\mathbb{V}$ и I в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ изображаются одной и той же матрицей; таким образом $\mathbb{V}^t\mathbb{V} = I$.

(iii)⇒(iv) Из равенства $\mathbb{V}^t\mathbb{V} = I$ вытекает равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{V}^t = E$. Следовательно (т.к. $\mathrm{rank}\mathbb{V} = \mathrm{rank}\mathbb{V}^t$), имеет место равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{V} = E$. Кроме того, по второму следствию из теоремы 8.3 из равенства $\mathrm{Ran}\mathbb{V}^t = E$ вытекает соотношение $\mathrm{Ker}\mathbb{V} = \{\mathbb{O}\}$. Таким образом оператор $\mathbb{V}: E \to E$ — биекция. Следовательно существует обратный оператор $\mathbb{V}^{-1}$, а следовательно $\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^t$, и значит $\mathbb{V}\mathbb{V}^t = I$.

(iv)⇒(v) Из равенства $\mathbb{V}\mathbb{V}^t = I$ вытекает равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{V} = E$, а вместе с ним (в силу теоремы 8.3 и равенства $\mathrm{rank}\mathbb{V} = \mathrm{rank}\mathbb{V}^t$) равенства $\mathrm{Ran}\mathbb{V}^t = E$, $\mathrm{Ker}\mathbb{V} = \{\mathbb{O}\}$. Таким образом оператор $\mathbb{V}$ — биекция, следовательно существует оператор $\mathbb{V}^{-1}$, и значит $\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^t$.

(v)⇒(i) При всех $x \in E$ справедливо

$$\|\mathbb{V}x\|^2 = (\mathbb{V}x, \mathbb{V}x) = (\mathbb{V}^t\mathbb{V}x, x) = (Ix, x) = (x, x) = \|x\|^2.$$

□

Свойства изометрического оператора.

1) Если $\mathbb{V}$ изометрический оператор, то $\mathbb{V}^t = \mathbb{V}^{-1}$ — изометрический.
2) Единичный оператор I — изометрический.
3) Если $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ — изометрические, то $\mathbb{V}_1\mathbb{V}_2$ — изометрический.
4) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E, $\mathbb{V} \in \Lambda(E)$ — изометрический оператор, изображающийся в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ матрицей V. Тогда матрица V обратима и $V^t = V^{-1}$.
5) Если $\mathbb{V}$ изометрический оператор, то $\det\mathbb{V} = \pm 1$.

Опр. Матрицу $V \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ называют ортогональной, если она обратима и $V^t = V^{-1}$.

Предложение 8.5. Матрица $V \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ ортогональна тогда и только тогда, когда ее столбцы образуют ортонормированный базис в стандартном вещественном евклидовом пространстве.

Доказательство. Пусть матрица $V \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ ортогональна. Зададим линейный оператор $\mathbb{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ равенством $\mathbb{V}\vec{x} = V \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Матрица V изображает оператор $\mathbb{V}$ в стандартном базисе. Следовательно, оператор $\mathbb{V}^t$ изображается матрицей V^t, а значит $\mathbb{V}^t\mathbb{V} = I$, и оператор $\mathbb{V}$ — изометрический. Столбцы матрицы V есть векторы $\vec{f}_k = \mathbb{V}\vec{e}_k$, где $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Поскольку стандартный базис ортонормирован, а оператор $\mathbb{V}$ сохраняет скалярное произведение, набор векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ так же ортонормирован. Таким образом столбца матрицы V образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Пусть столбцы $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^n$ матрицы V образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Зададим линейный оператор $\mathbb{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ равенством $\mathbb{V}\vec{x} = V \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Матрица V изображает оператор $\mathbb{V}$ в стандартном базисе $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$. Для всякого $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\vec{e}_k$ справедливо равенство $\mathbb{V}\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\vec{f}_k$. При этом выполнено

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \|\mathbb{V}\vec{x}\|^2.$$

Следовательно, оператор $\mathbb{V}$ — изометрческий, а матрица V ортогональна. □

§9. Линейные операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве.

Здесь мы обсудим результаты предыдущего параграфа в частном случае стандартного вещественного евклидова пространства. Для полноты изложения мы приведем большинство результатов с доказательствами (не ссылаясь на §8). Мы дадим изометрическому оператору и ортогональной матрице определения не совпадающие с изложенными выше, но эквивалентные им (согласно теореме 8.4 и предложению 8.5).

Напомним, что стандартным вещественным пространством мы называем пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^t \cdot \vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. Транспонирование линейного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве.

Лемма 9.1. Для любой матрицы $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, A^t\vec{y}), \quad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство.

$$(A\vec{x},y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}x_j\right)y_i = \sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}[A]_{ij}y_i = \sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}[A^t]_{ji}y_i = (\vec{x}, A^t\vec{y}).$$

□

Теорема 9.1. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует единственный линейный оператор $\mathbb{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}\vec{y}).$$

Доказательство. Проверим существование оператора $\mathbb{B}$. Пусть оператор $\mathbb{A}$ задается матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Зададим оператор $\mathbb{B}$ матрицей A^t. В силу леммы 9.1 оператор $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}\vec{y}).$$

Проверим единственность оператора $\mathbb{B}$. Предположим имеются два оператора $\mathbb{B}_1$,$\mathbb{B}_2$ такие, что

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}_1\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}_2\vec{y}).$$

Тогда при вяком $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ справедливо:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{B}_1\vec{y} - \mathbb{B}_2\vec{y},\vec{x}) = (\vec{y},\mathbb{A}\vec{x}) - (\vec{y},\mathbb{A}\vec{x}) = 0.$$

Следовательно, $\mathbb{B}_1\vec{y} = \mathbb{B}_2\vec{y}$ при всех $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, а потому $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$. □

Опр. Пусть $\mathbb{A},\mathbb{B}$ — линейные операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве, удовлетворяющие условию

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{A}x,y) = (x,\mathbb{B}y).$$

Тогда оператор $\mathbb{B}$ обозначается через $\mathbb{A}^t$ и называется транспонированным к оператору $\mathbb{A}$.

Свойства.

1) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^t = \mathbb{A}^t + \mathbb{B}^t$.

Доказательство.

$$((\mathbb{A}+\mathbb{B})\vec{x},\vec{y}) = (\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) + (\mathbb{B}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{A}^t\vec{y}) + (\vec{x},\mathbb{B}^t\vec{y}) = (\vec{x},(\mathbb{A}^t+\mathbb{B}^t)\vec{y}).$$

□

2) $(\alpha\mathbb{A})^t = \alpha(\mathbb{A}^t)$.

Доказательство.

$$(\alpha\mathbb{A}\vec{x},\vec{y}) = \alpha(\vec{x},\mathbb{A}^t\vec{y}) = (\vec{x},\alpha\mathbb{A}^t\vec{y}).$$

□

3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B}\vec{x},\vec{y}) = (\mathbb{B}\vec{x},\mathbb{A}^t\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{B}^t\mathbb{A}^t\vec{y}).$$

□

4) $(\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}^t\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\mathbb{A}^t\vec{x}) = (\mathbb{A}\vec{y},\vec{x}) = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y}).$$

□

5) $I^t = I$.
6) $\mathbb{O}^t = \mathbb{O}$.
7) $(\mathbb{A}^t\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y})$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}^t\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\mathbb{A}^t\vec{x}) = (\mathbb{A}\vec{y},\vec{x}) = (\vec{x},\mathbb{A}\vec{y}).$$

□

8) Пусть оператор $\mathbb{A}$ задан матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Тогда оператор $\mathbb{A}^t$ задан матрицей A^t.
9) $\det\mathbb{A}^t = \det\mathbb{A}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

10) $\mathrm{Tr}\mathbb{A}^t = \mathrm{Tr}\mathbb{A}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

11) $\mathrm{rank}\mathbb{A}^t = \mathrm{rank}\mathbb{A}$.

Доказательство. Из свойства 8. □

Опр. Оператор $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве называется симметричным, если $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}$.

Опр. Оператор $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве называется антисимметричным, если $\mathbb{A}^t = -\mathbb{A}$.

Свойства.

1) Для любого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве оператор $\mathbb{A}_s := \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^t)$ — симметричный.
2) Для любого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве оператор $\mathbb{A}_a := \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^t)$ — антисимметричный.
3) Каждый оператор $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве раскладывается в сумму симметричного и антисимметричного $\mathbb{A} = \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_a$.

2. Теорема об образе оператора и ядре транспонированного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 9.3. Для всякого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве справедливо разложение

$$\mathrm{Ran}\mathbb{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = \mathbb{R}^n.$$

Доказательство.

$$\vec{z} \in (\mathrm{Ran}\mathbb{A})^{\perp} \Leftrightarrow \forall \vec{f} \in \mathrm{Ran}\mathbb{A} \quad (\vec{z}, \vec{f}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\vec{z}, \mathbb{A}\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{A}^t\vec{z}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}^t\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{z} \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t.$$

□

Следствия теоремы 9.3. Для всякого оператора $\mathbb{A}$ в стандартном вещественном евклидовом пространстве справедливы следующие утверждения.

1) $\mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
2) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A}^t = E$.
3) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
4) Уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{f}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\vec{f} \perp \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t$.
5) Уравнение $\mathbb{A}x = \vec{f}$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}^t\vec{x} = \vec{0}$ имеет только нулевое решение.
6) Уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$ имеет только нулевое решение.
7) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathbb{A}^t = \{\vec{0}\}$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют непосредственно из теоремы 8.3. Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и соотношений

$$\dim\mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A}^t = \dim\mathrm{Ran}\mathbb{A}^t.$$

Утверждение 4) является переформулировкой теоремы 8.3. Утверждение 5) вытекает непосредственно из теоремы 8.3. Утверждение 6) следует из утверждения 3). Утверждение 7) вытекает из утверждений 1) и 3). □

Отметим, что шестое следствие фактически является альтернативой Фредгольма.

3. Ортогональные матрицы. Изометрические операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Опр. Матрицу $V \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ называют ортогональной, если ее столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Задаваемый матрицей V оператор $\mathbb{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будем называть изометрическим.

Теорема 9.4. Для матрицы $V \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ следующие утверждения эквивалентны:

(i) V — ортогональна;

(ii) при всех $\vec{x}, \vec{y}, \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $(V\vec{x}, V\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$;

(iii) $V^tV = I$;

(iv) $VV^t = I$;

(v) матрица V обратима и справедливо равенство $V^{-1} = V^t$.

Доказательство. Эта теорема, разумеется, следует из теоремы 8.4 и предложения 8.5, однако на экзамене эту теорему разрешается привести без доказательства. □

Свойства ортогональной матрицы.

1) Если V ортогональная, то $V^t = V^{-1}$ — ортогональная.
2) Единичная матрица I — ортогональна.
3) Если V_1 и V_2 — ортогональные, то V_1V_2 — ортогональная.
4) Если V ортогональна, то $\det \mathbb{V} = \pm 1$.