Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 30.04.2020

4. Матрица поворота на плоскости. Здесь мы разберем два важных примера ортогональных матриц.

a. Пусть заданы две прямоугольные декартовы системы координат на плоскости с общим началом: $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ — «старая система координат», $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ — «новая система координат». Для определенности предположим обе системы координат правыми, «новая система координат» получается из «старой системы координат» поворотом на угол φ против часовой стрелки. Радиус-вектор $\vec{a}$ можно разложить по обоим базисам:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}'.$$

Вопрос: как выразить «старые» координаты через «новые»?

Ответ: выразим сперва «новые» орты через «старые». Именно, вектор $\vec{i}'$ получается поворотом на угол φ против часовой стрелки из вектора $\vec{i}$. Следовательно, координаты вектора $\vec{i}'$ — это $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, т.е.

$$\vec{i}' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}.$$

Аналогично, вектор $\vec{j}'$ получается поворотом на угол φ против часовой стрелки из вектора $\vec{j}$ или поворотом на угол $\varphi + \frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки из вектора $\vec{i}$. Следовательно, координаты вектора $\vec{j}'$ есть $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$ и $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$. Таким образом,

$$\vec{j}' = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}.$$

Далее, справедливы равенства

$$\vec{a} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' = a'_x(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) + a'_y(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) =$$
$$= (a'_x\cos\varphi - a'_y\sin\varphi)\vec{i} + (a'_x\sin\varphi + a'_y\cos\varphi)\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Таким образом, получаем выражение «старых» координат через «новые»:

$$\begin{cases} a_x = a'_x\cos\varphi - a'_y\sin\varphi, \\ a_y = a'_x\sin\varphi + a'_y\cos\varphi; \end{cases}$$

или по-другому:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрицу, определенную равенством

$$T_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

называют матрицей (собственного) поворота.

Упр. Проверьте: матрица T_φ ортогональна, $\det T_\varphi = 1$.

b. Пусть заданы три прямоугольные декартовы системы координат на плоскости с общим началом: $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ — «старая система координат», $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ — «новая система координат» и $\{O, \vec{i}'', \vec{j}''\}$ — «сверхновая система координат». Для определенности предположим первые две системы координат правыми, «новая система координат» получается из «старой системы координат» поворотом на угол φ против часовой стрелки. «Сверхновая система координат» получается из «новой системы координат» изменением направления вектора $\vec{j}'$. Радиус-вектор $\vec{a}$ можно разложить по всем трем базисам:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' = a''_x\vec{i}'' + a''_y\vec{j}''.$$

Вопрос: как выразить «старые» координаты через «сверхновые»?

Ответ: нам уже известно выражение «старых» координат через «новые». Выразим теперь «новые» координаты через «сверхновые». Сперва выразим «сверхновые» орты через «новые». Именно, очевидны равенства $\vec{i}'' = \vec{i}'$, $\vec{j}'' = -\vec{j}'$. Как и выше воспользуемся этими выражениями:

$$\vec{a} = a''_x\vec{i}'' + a''_y\vec{j}'' = a''_x\vec{i}' + a''_y(-\vec{j}') = a''_x\vec{i}' - a''_y\vec{j}' = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}'.$$

Таким образом, получаем выражение «новых» координат через «сверхновые»:

$$\begin{cases} a'_x = a''_x, \\ a'_y = -a''_y. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в выражения «старых» координат через «новые» и получим

$$\begin{cases} a_x = a''_x\cos\varphi + a''_y\sin\varphi, \\ a_y = a''_x\sin\varphi - a''_y\cos\varphi; \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''_x \\ a''_y \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрицу, определенную равенством

$$\tilde{T}_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

назовем матрицей несобственного поворота.

Упр. Проверьте: матрица $\tilde{T}_\varphi$ ортогональна, $\det\tilde{T}_\varphi = -1$.

Теорема 9.5. Всякая ортогональная матрица $T \in M^{2,2}(\mathbb{R})$ является либо матрицей собственного поворота (если ее определитель единица), либо матрицей несобственного поворота (если $\det T = -1$).

Доказательство. Пусть $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2,2}(\mathbb{R})$ — ортогональная матрица. Поскольку выполнено условие $a^2 + c^2 = 1$, существует единственный угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{cases} \cos\varphi = a, \\ \sin\varphi = c. \end{cases}$$

Пусть, например, $a = \cos\varphi \neq 0$. Из условия $ab + cd = 0$ находим $b = -\frac{c}{a}d \Leftrightarrow b = -\mathrm{tg}\varphi d$. В силу условия $b^2 + d^2 = 1$ получаем

$$(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)d^2 = 1 \Leftrightarrow d^2 = \cos^2\varphi;$$

таким образом либо $b = \sin\varphi$, $d = -\cos\varphi$ либо $b = -\sin\varphi$, $d = \cos\varphi$, т.е.

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \text{ либо } T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

□

5. Матрица поворота в пространстве. Пусть заданы две прямоугольные декартовы системы координат в пространстве с общим началом: $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — «старая система координат», $\{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ — «новая система координат». Обе системы векторов мы считаем ортонормированными. Можно показать, что в этом случае «новый» базис получается из старого поворотом либо поворотом и изменением направления одного из векторов. Любой радиус-вектор $\vec{a}$ можно разложить по обоим базисам:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' + a'_z\vec{k}'.$$

Вопрос: как выразить «старые» координаты через «новые»?

Ответ: как и выше выразим «новые» орты через «старые» орты. Поскольку старый базис ортонормирован, мы легко выразим «новые» орты через «старые»:

$$\begin{aligned}
\vec{i}' &= (\vec{i}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{i}', \vec{k})\vec{k};\\
\vec{j}' &= (\vec{j}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{j}', \vec{k})\vec{k};\\
\vec{k}' &= (\vec{k}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{k}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{k}', \vec{k})\vec{k}.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\vec{a} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' + a'_z\vec{k}' = a'_x((\vec{i}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{i}', \vec{k})\vec{k}) + \\
+ a'_y((\vec{j}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{j}', \vec{k})\vec{k}) + a'_z((\vec{k}', \vec{i})\vec{i} + (\vec{k}', \vec{j})\vec{j} + (\vec{k}', \vec{k})\vec{k}) = \\
= (a'_x(\vec{i}', \vec{i}) + a'_y(\vec{j}', \vec{i}) + a'_z(\vec{k}', \vec{i}))\vec{i} + (a'_x(\vec{i}', \vec{j}) + a'_y(\vec{j}', \vec{j}) + a'_z(\vec{k}', \vec{j}))\vec{j} + \\
+ (a'_x(\vec{i}', \vec{k}) + a'_y(\vec{j}', \vec{k}) + a'_z(\vec{k}', \vec{k}))\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.
\end{aligned}$$

Таким образом, «старые» координаты выражаются через «новые» следующим образом

$$\begin{cases}
a_x = a'_x(\vec{i}', \vec{i}) + a'_y(\vec{j}', \vec{i}) + a'_z(\vec{k}', \vec{i}),\\
a_y = a'_x(\vec{i}', \vec{j}) + a'_y(\vec{j}', \vec{j}) + a'_z(\vec{k}', \vec{j}),\\
a_z = a'_x(\vec{i}', \vec{k}) + a'_y(\vec{j}', \vec{k}) + a'_z(\vec{k}', \vec{k}).
\end{cases}$$

Запишем последние равенства в векторном виде

$$\begin{pmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{i}', \vec{i}) & (\vec{j}', \vec{i}) & (\vec{k}', \vec{i})\\ (\vec{i}', \vec{j}) & (\vec{j}', \vec{j}) & (\vec{k}', \vec{j})\\ (\vec{i}', \vec{k}) & (\vec{j}', \vec{k}) & (\vec{k}', \vec{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_x\\ a'_y\\ a'_z \end{pmatrix}.$$

Упр. Проверьте, что матрица

$$T := \begin{pmatrix} (\vec{i}', \vec{i}) & (\vec{j}', \vec{i}) & (\vec{k}', \vec{i})\\ (\vec{i}', \vec{j}) & (\vec{j}', \vec{j}) & (\vec{k}', \vec{j})\\ (\vec{i}', \vec{k}) & (\vec{j}', \vec{k}) & (\vec{k}', \vec{k}) \end{pmatrix}$$

ортогональна.

Опр. Матрицу, определенную равенством

$$T := \begin{pmatrix} (\vec{i}', \vec{i}) & (\vec{j}', \vec{i}) & (\vec{k}', \vec{i})\\ (\vec{i}', \vec{j}) & (\vec{j}', \vec{j}) & (\vec{k}', \vec{j})\\ (\vec{i}', \vec{k}) & (\vec{j}', \vec{k}) & (\vec{k}', \vec{k}) \end{pmatrix}$$

будем называть матрицей поворота в пространстве. При этом, если $\det T = 1$ будем называть поворот собственным, а если $\det T = -1$ будем называть поворот несобственным.

Собственный поворот сохраняет ориентацию тройки базисных векторов (т.е. является «настоящим» поворотом), а несобственный поворот меняет ориентацию тройки базисных векторов (и является композицией собственного поворота и изменения направления одного из базисных векторов).

Теорема 9.6. Всякая ортогональная матрица $T \in M^{3,3}(\mathbb{R})$ является матрицей поворота.

Доказательство. Пусть матрица

$$T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ортогональна. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в пространстве. Рассмотрим векторы

$$\vec{i}' = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} + a_{31}\vec{k};$$

$$\vec{j}' = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{32}\vec{k};$$

$$\vec{k}' = a_{13}\vec{i} + a_{23}\vec{j} + a_{33}\vec{k}.$$

Поскольку столбцы матрицы T ортонормированы, векторы $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ ортонормированы (**упр.** проверьте это). При этом очевидны равенства

$$\begin{cases} a_{11} = (\vec{i}', \vec{i}), & a_{12} = (\vec{j}', \vec{i}), & a_{13} = (\vec{k}', \vec{i}), \\ a_{21} = (\vec{i}', \vec{j}), & a_{22} = (\vec{j}', \vec{j}), & a_{23} = (\vec{k}', \vec{j}), \\ a_{31} = (\vec{i}', \vec{k},) & a_{32} = (\vec{j}', \vec{k}), & a_{33} = (\vec{k}', \vec{k}). \end{cases}$$

Таким образом справедливо равенство

$$T = \begin{pmatrix} (\vec{i}', \vec{i}) & (\vec{j}', \vec{i}) & (\vec{k}', \vec{i}) \\ (\vec{i}', \vec{j}) & (\vec{j}', \vec{j}) & (\vec{k}', \vec{j}) \\ (\vec{i}', \vec{k}) & (\vec{j}', \vec{k}) & (\vec{k}', \vec{k}) \end{pmatrix}.$$

□

§10. Линейные операторы в комплексном евклидовом пространстве

1. Сопряжение линейного оператора в комплексном евклидовом пространстве.

Лемма 10.1. Пусть E — комплексное конечномерное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E, $a_{ij} := (\mathbb{A}e_j, e_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По теореме 2.2 (лекция от 13.04.2020, Гл. V, §2, п.3) вектор $\mathbb{A}e_j$ раскладывается по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$ следующим образом

$$\mathbb{A}e_j = \sum_{i=1}^n (\mathbb{A}e_j, e_i)e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, j-м столбцом изображающей матрицы (см. лекцию от 26.04.2020, Гл.IV, §3, п.6) оператора $\mathbb{A}$ является вектор

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{A}e_j, e_1) \\ (\mathbb{A}e_j, e_2) \\ \vdots \\ (\mathbb{A}e_j, e_n) \end{pmatrix},$$

что и доказывает нашу лемму. □

Теорема 10.2. Пусть E — комплексное конечномерное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$. Тогда существует единственный оператор $\mathbb{B} \in \Lambda(E)$, удовлетворяющий условию

$$\forall x, y \in E \quad (\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{B}y). \qquad (+)$$

Доказательство. Проверим существование. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. Определим оператор $\mathbb{B} \in \Lambda(E)$ на векторах базиса:

$$\mathbb{B}e_j = \sum_{i=1}^n (e_j, \mathbb{A}e_i)e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

По теореме 5.1 такой оператор $\mathbb{B}$ существует и единственен. Отметим равенство

$$(e_k, \mathbb{B}e_j) = \sum_{i=1}^n (e_k, (e_j, \mathbb{A}e_i)e_i) = \sum_{i=1}^n \overline{(e_j, \mathbb{A}e_i)}\,(e_k, e_i) = \overline{(e_j, \mathbb{A}e_k)} = (\mathbb{A}e_k, e_j).$$

Осталось показать, что построенный оператор $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию (+). В самом деле

$$\forall x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in E, \quad y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \in E \quad (x, \mathbb{B}y) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j}(e_i, \mathbb{B}e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j}(\mathbb{A}e_i, e_j) = (\mathbb{A}x, y).$$

Проверим единственность. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. Пусть линейные операторы $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ удовлетворяют условию (+). Тогда по Лемме 8.1 они изображаются одинаковыми матрицами в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. Следовательно, по теореме 3.5 (лекция от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6), операторы $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ совпадают. □

Опр. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Lambda(E)$,

$$\forall x, y \in E \quad (\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{B}y).$$

Тогда оператор $\mathbb{B}$ обозначается через $\mathbb{A}^*$ и называется сопряженным к оператору $\mathbb{A}$.

Свойства.

1) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$.

   Доказательство.

$$((\mathbb{A} + \mathbb{B})x, y) = (\mathbb{A}x, y) + (\mathbb{B}x, y) = (x, \mathbb{A}^*y) + (x, \mathbb{B}^*y) = (x, (\mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*)y).$$

□

2) $(\alpha\mathbb{A})^* = \overline{\alpha}(\mathbb{A}^*)$.

   Доказательство.

$$(\alpha\mathbb{A}x, y) = \alpha(x, \mathbb{A}^*y) = (x, \overline{\alpha}\mathbb{A}^*y).$$

□

3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*$.

   Доказательство.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B}x, y) = (\mathbb{B}x, \mathbb{A}^*y) = (x, \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*y).$$

□

4) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$.

Доказательство.

$$(\mathbb{A}^*x, y) = \overline{(y, \mathbb{A}^*x)} = \overline{(\mathbb{A}y, x)} = (x, \mathbb{A}y).$$

□

5) $I^* = I$.
6) $\mathbb{O}^* = \mathbb{O}$.
7) $(\mathbb{A}^*x, y) = (x, \mathbb{A}y)$.

   Доказательство.

$$(\mathbb{A}^*x, y) = \overline{(y, \mathbb{A}^*x)} = \overline{(\mathbb{A}y, x)} = (x, \mathbb{A}y).$$

□

8) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E; оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ изображается матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6). Тогда оператор $\mathbb{A}^*$ изображается матрицей A^* в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$.

   Доказательство. Пусть оператор $\mathbb{A}^*$ изображается матрицей B в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. По лемме 8.1 справедливы равенства

$$[B]_{ij} = (\mathbb{A}^*e_j, e_i) = (e_j, \mathbb{A}e_i) = \overline{(\mathbb{A}e_i, e_j)} = \overline{[A]_{ji}}.$$

□

9) $\det\mathbb{A}^* = \overline{\det\mathbb{A}}$.

   Доказательство. Из свойства 8. □

10) $\mathrm{Tr}\mathbb{A}^* = \overline{\mathrm{Tr}\mathbb{A}}$.

   Доказательство. Из свойства 8. □

11) $\mathrm{rank}\mathbb{A}^* = \mathrm{rank}\mathbb{A}$.

   Доказательство. Как следует из теоремы 3.5 (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.6) и свойства 1 (см. лекцию от 26.03.2020, Гл.IV, §3, п.7), ранг оператора совпадает с рангом изображающей его матрицы, ранг же матрицы при сопряжении не меняется.

□

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство; тогда оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ называется самосопряженным, если $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$.

Свойства.

1) Для любого оператора $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ оператор $\mathbb{A}_{re} := \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*)$ — самосопряженный.
2) Для любого оператора $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ оператор $\mathbb{A}_{im} := \frac{1}{2i}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^*)$ — самосопряженный.
3) Каждый оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ раскладывается в сумму $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{re} + i\mathbb{A}_{im}$.

2. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора в комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 10.3. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство; тогда для всякого $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ справедливо разложение

$$\mathrm{Ran}\mathbb{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = E$$

Доказательство.

$$z \in (\mathrm{Ran}\mathbb{A})^{\perp} \Leftrightarrow \forall f \in \mathrm{Ran}\mathbb{A} \;\; (z, f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E \;\; (z, \mathbb{A}x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in E \;\; (\mathbb{A}^* z, x) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}^* z = \mathbb{O} \Leftrightarrow z \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}^*.$$

□

Следствия теоремы 10.3. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство; тогда для всякого $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$ справедливы следующие утверждения.

1) $\mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
2) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A}^* = E$.
3) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\mathbb{A} = E$.
4) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f \perp \mathrm{Ker}\mathbb{A}^*$.
5) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}^* x = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение.
6) Уравнение $\mathbb{A}x = f$ имеет решение при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbb{A}x = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение.
7) $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathbb{A}^* = \{\mathbb{O}\}$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) и 5) следуют непосредственно из теоремы 10.3. Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и соотношений

$$\mathrm{dim}\mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A} = \mathrm{rank}\mathbb{A}^* = \mathrm{dim}\mathrm{Ran}\mathbb{A}^*.$$

Утверждение 4) является переформулировкой теоремы 10.3. Утверждение 6) следует из утверждения 3). Утверждение 7) вытекает из утверждений 1) и 3). □

Отметим, что шестое следствие фактически является альтернативой Фредгольма для операторов в конечномерном компелксном евклидовом пространстве.

3. Унитарный оператор в комплексном евклидовом пространстве.

Опр. Пусть E — комплексное евклидово пространство; оператор $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$ называется унитарным, если при всех $x \in E$ справедливо равенство $\|\mathbb{U}x\| = \|x\|$.

Теорема 10.4. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство; $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$. Тогда следующие факты эквивалентны:

(i) $\mathbb{U}$ — унитарный;
(ii) при всех $x, y, \in E$ справедливо равенство $(\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) = (x, y)$;
(iii) $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = I$;
(iv) $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = I$;

(v) оператор $\mathbb{U}$ — биекция, и справедливо равенство $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$.

Доказательство.

(i)⇒(ii) При всех $x, y \in E$ справедливы соотношения

$$\|\mathbb{U}(x+y)\| = \|(x+y)\| \Leftrightarrow \|\mathbb{U}(x+y)\|^2 = \|(x+y)\|^2 \Leftrightarrow$$
$$\|Ux\|^2 + 2\mathrm{Re}(\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) + \|\mathbb{U}y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \Rightarrow \mathrm{Re}(\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) = \mathrm{Re}(x,y).$$

$$\|\mathbb{U}(x+iy)\| = \|(x+iy)\| \Leftrightarrow \|\mathbb{U}(x+iy)\|^2 = \|(x+iy)\|^2 \Leftrightarrow$$
$$\|Ux\|^2 + 2\mathrm{Re}(\mathbb{U}x, \mathbb{U}iy) + \|\mathbb{U}iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,iy) + \|iy\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\mathbb{U}x, \mathbb{U}iy) = \mathrm{Re}(x,iy) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(-i)(\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) = \mathrm{Re}(-i)(x,y) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) = \mathrm{Im}(x,y).$$

(ii)⇒(iii) Зададим ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E. При всех $x, y \in E$ справедливы равенства

$$(\mathbb{U}^*\mathbb{U}x, y) = (\mathbb{U}x, \mathbb{U}y) = (x,y) = (Ix, y).$$

Следовательно, по лемме 8.1, операторы $\mathbb{U}^*\mathbb{U}$ и I в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ изображаются одной и той же матрицей; таким образом $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = I$.

(iii)⇒(iv) Из равенства $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = I$ вытекает равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{U}^* = E$. Следовательно (т.к. $\mathrm{rank}\mathbb{U} = \mathrm{rank}\mathbb{U}^*$), имеет место равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{U} = E$. Кроме того, по второму следствию из теоремы 10.3 из равенства $\mathrm{Ran}\mathbb{U}^* = E$ вытекает соотношение $\mathrm{Ker}\mathbb{U} = \{\mathbb{O}\}$. Таким образом оператор $\mathbb{U} : E \to E$ — биекция. Следовательно существует обратный оператор $\mathbb{U}^{-1}$, а следовательно $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$, и значит $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = I$.

(iv)⇒(v) Из равенства $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = I$ вытекает равенство $\mathrm{Ran}\mathbb{U} = E$, а вместе с ним (в силу теоремы 10.3 и равенства $\mathrm{rank}\mathbb{U} = \mathrm{rank}\mathbb{U}^*$) равенства $\mathrm{Ran}\mathbb{U}^* = E$, $\mathrm{Ker}\mathbb{U} = \{\mathbb{O}\}$. Таким образом оператор $\mathbb{U}$ — биекция, следовательно существует оператор $\mathbb{U}^{-1}$, и значит $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$.

(v)⇒(i) При всех $x \in E$ справедливо

$$\|\mathbb{U}x\|^2 = (\mathbb{U}x, \mathbb{U}x) = (\mathbb{U}^*\mathbb{U}x, x) = (Ix, x) = (x,x) = \|x\|^2.$$

□

Свойства унитарного оператора.

1) Если $\mathbb{U}$ унитарный оператор, то $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ — унитарный.
2) Единичный оператор I — унитарный.
3) Если $\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2$ — унитарные, то $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2$ — унитарный.
4) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в E, $\mathbb{U} \in \Lambda(E)$ — унитарный оператор, изображающийся в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ матрицей U. Тогда матрица U обратима и $U^* = U^{-1}$.
5) Если $\mathbb{U}$ унитарный оператор, то $|\det\mathbb{U}| = 1$.

Опр. Матрицу $U \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ называют унитарной, если она обратима и $U^* = U^{-1}$.

Пример. Всякая вещественная ортогональная матрица унитарна.

Предложение 10.5. Матрица $U \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ унитарна тогда и только тогда, когда ее столбцы образуют ортонормированный базис в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Доказательство. Пусть матрица $U \in M^{n,n}(\mathbb{U})$ унитарна. Зададим линейный оператор $\mathbb{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ равенством $\mathbb{U}\vec{x} = U \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Матрица V изображает оператор $\mathbb{U}$ в паре стандартных базисов. Следовательно, оператор $\mathbb{U}^*$ изображается матрицей U^*, а значит $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = I$, и оператор $\mathbb{U}$ — унитарный. Столбцы матрицы U есть векторы $\vec{f_k} = \mathbb{U}\vec{e}_k$, где $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$. Поскольку стандартный базис ортонормирован, а оператор $\mathbb{U}$ сохраняет скалярное произведение, набор векторов $\{\vec{f_k}\}_{k=1}^n$ так же ортонормирован. Таким образом столбца матрицы U образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$.

Пусть столбцы $\{\vec{f_k}\}_{k=1}^n$ матрицы U образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Зададим линейный оператор $\mathbb{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ равенством $\mathbb{U}\vec{x} = U \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Матрица U изображает оператор $\mathbb{U}$ в паре стандартных базисов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$, $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$. Для всякого $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \vec{e}_k$ справедливо равенство $\mathbb{U}\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \vec{f_k}$. При этом выполнено

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \|\mathbb{U}\vec{x}\|^2.$$

Следовательно, оператор $\mathbb{U}$ — унитарный, и матрица U унитарная. $\square$