Дистанционное обучение. Лекция 1. 19 марта 2020 года

Мы остановились на таблице "Типы линейных отображений". Извлечем из нее следствия.

Альтернатива Фредгольма. *Пусть* $\dim E = \dim F = n$. *Пусть* $A \in \Lambda(E, F)$. *Тогда имеет место альтернатива: либо существует решение уравнения* $Ax = f$ *при любом* $f \in F$, *либо существует нетривиальное решение однородного уравнения* $Az = \mathbf{0}_F$.

Доказательство. Очевидно, имеет место альтернатива: либо $\operatorname{rank} A = n$, либо $\operatorname{rank} A < n$. Первое равенство равносильно существованию решения при любой правой части (см. первую колонку в таблице). Второе равенство равносильно тому, что $\operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{0}_E\}$ (в силу известного тождества $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$), что в свою очередь равносильно существованию нетривиального решения однородного уравнения. □

Следствие 0.1. *Пусть* $\dim E = \dim F = n$. *Оператор* $A \in \Lambda(E, F)$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.

Доказательство. Соотношение $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$ равносильно тому, что $\operatorname{rank} A = n$ (в силу тождества $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$). А это равносильно тому, что оператор A — изоморфизм (здесь важно, что размерности пространств E и F совпадают). См. третью колонку в таблице. □

Мы часто будем использовать достаточность: при условии $\dim E = \dim F$, для того, чтобы убедиться, что некоторый оператор $A : E \to F$ является изоморфизмом, достаточно проверить тривиальность его ядра.

Глава 2. Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве

§ 1. Преобразование базисов, координат и изображающих матриц линейных операторов

В главе 2 считаем, что E — *конечномерное линейное пространство над полем* K, *где* $K = \mathbb{R}$ *или* $K = \mathbb{C}$. В случае $K = \mathbb{R}$ мы называем E *вещественным линейным пространством*, в случае $K = \mathbb{C}$ — *комплексным линейным пространством.*

1.1. **Преобразование базисов.** Пусть в пространстве E заданы два базиса $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$. Разложим векторы $\widetilde{e}_k$

в базисе $\mathbf{e}$:

$$\widetilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. *Матрицей перехода от базиса* $\mathbf{e}$ *к базису* $\widetilde{\mathbf{e}}$ *называется матрица*

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^n & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix},$$

элементы которой β_k^j *— координаты "новых" базисных векторов в "старом" базисе — определены в* (1.1).

Тогда k-й столбец матрицы b состоит из координат вектора $\widetilde{e}_k$ в "старом" базисе. Очевидно, столбцы матрицы b линейно независимы, а потому $\det b \neq 0$.

Определение 1.2. *Оператором перехода от базиса* $\mathbf{e}$ *к базису* $\widetilde{\mathbf{e}}$ *называется линейный оператор* $B : E \to E$, *такой что* $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Оператор B переводит вектор $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$ в вектор

$$Bx = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \widetilde{e}_k.$$

Изображающая матрица оператора B в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}$ — это матрица b. Очевидно, оператор B является автоморфизмом.

Введем теперь "символические векторы" (столбцы)

$$\vec{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{e}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (1.1) можно записать в матричной форме:

$$\vec{\widetilde{\mathbf{e}}} = b^t \vec{\mathbf{e}}. \tag{1.2}$$

Закон преобразования вида (1.2) (в подробной записи — (1.1)) называют *ковариантным законом.* У величин, которые преобразуются по ковариантному закону, принято писать нижние значки. "Хозяйкой" законов преобразования является матрица перехода b. Ниже мы увидим, что координаты векторов преобразуются по другому закону.

1.2. **Преобразование координат векторов.** Пусть $x \in E$. Разложим вектор x в базисе $\mathbf{e}$: $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$. Теперь разложим тот же вектор x в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$: $x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \widetilde{e}_k$. Используя (1.1), получаем

$$x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^j \widetilde{\xi}^k \right) e_j.$$

Следовательно,

$$\widetilde{\xi}^j = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^j \widetilde{\xi}^k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Мы получили закон преобразования координат одного и того же вектора в "старом" и "новом" базисах.

Удобно записать этот закон в матричной форме. Для этого введем векторы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}^n \end{pmatrix} \in K^n. \tag{1.4}$$

Тогда соотношения (1.3) можно записать в виде

$$\vec{x} = b\vec{\widetilde{x}} \ \text{ или } \ \vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x}. \tag{1.5}$$

Закон преобразования вида (1.5) (в подробной записи — (1.3)) называют *контравариантным законом.* У величин, которые преобразуются по контравариантному закону, принято писать верхние значки.

1.3. **Преобразование изображающих матриц линейных операторов.** Для краткости будем обозначать пространство линейных операторов из E в E через $\Lambda(E)$ (прежнее обозначение $\Lambda(E, E)$).

Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}$. Теперь мы будем называть *a изображающей матрицей оператора A в базисе* $\mathbf{e}$. Пусть $\widetilde{a} \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ (по-старому — в паре базисов $\widetilde{\mathbf{e}}$, $\widetilde{\mathbf{e}}$). Найдем связь между a и $\widetilde{a}$.

Пусть $x \in E$ и $Ax = y$. Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — столбцы координат векторов x и y в базисе $\mathbf{e}$. Равенство $Ax = y$ перейдет в равенство $a\vec{x} = \vec{y}$.

Пусть $\vec{\widetilde{x}}$ и $\vec{\widetilde{y}}$ — столбцы координат векторов x и y в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. Равенство $Ax = y$ перейдет в равенство $\widetilde{a}\vec{\widetilde{x}} = \vec{\widetilde{y}}$.

Домножая равенство $a\vec{x} = \vec{y}$ слева на b^{-1} и используя соотношения $\vec{x} = b\vec{\widetilde{x}}$ и $\vec{\widetilde{y}} = b^{-1}\vec{y}$ (см. (1.5)), получаем:

$$a\vec{x} = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad b^{-1}a\vec{x} = b^{-1}\vec{y} \quad \Rightarrow \quad b^{-1}ab\vec{\widetilde{x}} = \vec{\widetilde{y}}.$$

Сопоставим это с равенством $\widetilde{a}\vec{\widetilde{x}} = \vec{\widetilde{y}}$. Следовательно,

$$\widetilde{a} = b^{-1}ab. \tag{1.6}$$

Вывод: *изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ подобна изображающей матрице a этого оператора в базисе $\mathbf{e}$, а аффинитетом служит матрица b — матрица перехода от $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$.*

Замечание 1.3. *Обратно, если a — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$, а матрица $\widetilde{a}$ подобна матрице a с аффинитетом b, то есть, $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, то найдется такой базис $\widetilde{\mathbf{e}}$, в котором изображающая матрица оператора A есть $\widetilde{a}$. Новый базис можно построить по исходному с помощью формул* (1.1) *или* (1.2).

§ 2. Определитель, след, характеристический многочлен и спектр линейных операторов

2.1. **Определитель и след линейных операторов.**

Определение 2.1. *Пусть $A \in \Lambda(E)$ и пусть a — изображающая матрица оператора A в каком-либо базисе $\mathbf{e}$. Определителем оператора A называется число, равное определителю матрицы a, то есть,*

$$\det A := \det a. \tag{2.1}$$

Определение корректно, поскольку при переходе к другому базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ изображающая матрица меняется по закону (1.6): матрица $\widetilde{a}$ подобна матрице a, а у подобных матриц определители совпадают:

$$\det \widetilde{a} = \det a.$$

Свойства $\det A$

- Определитель тождественного оператора равен единице: $\det I = 1$.

  ☐ Это свойство очевидно, поскольку изображающей матрицей оператора I в любом базисе $\mathbf{e}$ является единичная матрица. ☐
- Пусть $A, C \in \Lambda(E)$. Тогда определитель композиции операторов AC равен произведению их определителей:

$$\det AC = \det A \cdot \det C.$$

□ Пусть a и c — изображающие матрицы операторов A и C в базисе $\mathbf{e}$. Тогда изображающей матрицей оператора AC в том же базисе является матрица ac. Остается вспомнить теорему об определителе произведения матриц. Имеем:

$$\det AC = \det ac = \det a \cdot \det c = \det A \cdot \det C. \qquad \square$$

- Оператор $A \in \Lambda(E)$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

  □ Мы знаем, что оператор $A \in \Lambda(E)$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A = n$ (где $n = \dim E$). Поскольку $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} a$ (где a — изображающая матрица оператора A в каком-либо базисе), это равносильно тому, что $\operatorname{rank} a = n$. Последнее свойство равносильно соотношению $\det a \neq 0$. Остается учесть (2.1). □
- Пусть $A \in \Lambda(E)$ — автоморфизм. Тогда

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \tag{2.2}$$

  □ В силу предыдущего свойства, $\det A \neq 0$. Имеем:

$$1 = \det I = \det A^{-1}A = \det A^{-1} \cdot \det A. \tag{2.3}$$

  Мы воспользовались равенством $A^{-1}A = I$ и свойством об определителе композиции операторов. Из (2.3) прямо вытекает (2.2). □

Определение 2.2. *Пусть $A \in \Lambda(E)$ и пусть a — изображающая матрица оператора A в каком-либо базисе* $\mathbf{e}$. *Следом оператора A называется число, равное следу матрицы a, то есть,*

$$\operatorname{Tr} A := \operatorname{Tr} a. \tag{2.4}$$

Определение корректно, поскольку при переходе к другому базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ изображающая матрица меняется по закону (1.6): матрица $\widetilde{a}$ подобна матрице a, а у подобных матриц следы совпадают:

$$\operatorname{Tr} \widetilde{a} = \operatorname{Tr} a.$$

Свойства $\operatorname{Tr} A$

- След оператора линеен:

$$\operatorname{Tr}(\alpha A + \beta C) = \alpha \operatorname{Tr} A + \beta \operatorname{Tr} C, \qquad \forall A, C \in \Lambda(E), \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

- След произведения (композиции) операторов не зависит от порядка сомножителей:

$$\operatorname{Tr} AC = \operatorname{Tr} CA, \qquad \forall A, C \in \Lambda(E).$$

Докажите эти свойства самостоятельно, используя определение следа оператора (см. (2.4)) и аналогичные свойства для матриц (см. курс Алгебры первого семестра).

2.2. **Ориентация в конечномерном вещественном линейном пространстве.** Мы знакомы с понятием ориентации по курсу аналитической геометрии. В трехмерном пространстве (геометрических векторов) рассматриваются всевозможные упорядоченные тройки некомпланарных векторов (т.е., всевозможные базисы). На этом классе вводится отношение эквивалентности: одна тройка эквивалентна другой, если существует непрерывная деформация, переводящая первую тройку во вторую. Тогда класс всех базисов разбивается ровно на два класса эквивалентности. Выбор одного из этих классов и есть выбор ориентации в пространстве.

Сейчас мы обсудим понятие ориентации в произвольном конечномерном вещественном линейном пространстве E. Пусть $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ — два базиса в E. Пусть $B : E \to E$ — оператор перехода от базиса $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$. По определению 1.2 имеем $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \dots, n$. Оператор B является автоморфизмом в E, а потому $\det B \neq 0$. Учитывая, что $\det B$ — вещественное число, получаем альтернативу: либо $\det B > 0$, либо $\det B < 0$.

Введем отношение эквивалентности на классе всех упорядоченных линейно независимых наборов из n векторов в E (т.е., на классе всех базисов в E).

Определение 2.3. *Говорят, что базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ эквивалентен базису $\mathbf{e}$, если определитель оператора перехода от $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$ положителен: $\det B > 0$.*

Убедимся, что это действительно отношение эквивалентности.

1) *Базис $\mathbf{e}$ эквивалентен $\mathbf{e}$*, поскольку оператор перехода — тождественный и $\det I = 1 > 0$.

2) *Если $\widetilde{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\mathbf{e}$, то $\mathbf{e}$ эквивалентен $\widetilde{\mathbf{e}}$.*

Действительно, если B — оператор перехода от $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$, то B^{-1} — оператор перехода от $\widetilde{\mathbf{e}}$ к $\mathbf{e}$. Из $\det B > 0$ следует, что

$$\det B^{-1} = (\det B)^{-1} > 0.$$

3) *Если $\widetilde{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\mathbf{e}$, а $\widehat{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widehat{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\mathbf{e}$.*

Действительно, если B — оператор перехода от $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$, а $\widehat{B}$ — оператор перехода от $\widetilde{\mathbf{e}}$ к $\widehat{\mathbf{e}}$, то оператором перехода от $\mathbf{e}$ к $\widehat{\mathbf{e}}$ служит

$\widehat{B}B$. Из $\det B > 0$ и $\det \widehat{B} > 0$ следует, что

$$\det \widehat{B}B = \det \widehat{B} \cdot \det B > 0.$$

Теорема 2.4. *Пусть E — конечномерное вещественное линейное пространство. Пусть $\dim E = n \geqslant 1$. Множество всех базисов в E разбивается ровно на два класса эквивалентности.*

Выбор одного из этих классов эквивалентности и есть выбор ориентации в пространстве E.

Доказательство. 1) Сначала докажем, что классов эквивалентности не меньше двух. Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и построим базис $\mathbf{e}_* = \{-e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, то есть, $e_{*1} = -e_1$, $e_{*k} = e_k$ при $k = 2, \ldots, n$. Пусть B_* — оператор перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}_*$, а b_* — соответствующая матрица перехода. Тогда

$$b_* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\det B_* = \det b_* = -1 < 0$, а потому базис $\mathbf{e}_*$ не эквивалентен базису $\mathbf{e}$. Значит, они принадлежат разным классам эквивалентности. Стало быть, классов эквивалентности не меньше двух.

2) Теперь покажем, что классов эквивалентности ровно два. Фиксируем базис $\mathbf{e}$, построим $\mathbf{e}_*$ как в пункте 1. Будем “сортировать” остальные базисы. Пусть $\widetilde{\mathbf{e}}$ — произвольный базис и B — оператор перехода от $\mathbf{e}$ к $\widetilde{\mathbf{e}}$.

Если $\det B > 0$, то $\widetilde{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\mathbf{e}$.

Если же $\det B < 0$, то $\widetilde{\mathbf{e}}$ эквивалентен $\mathbf{e}_*$. Действительно,

$$Be_k = \widetilde{e}_k, \quad B_* e_k = e_{*k} \quad \Rightarrow \quad B_* B^{-1} \widetilde{e}_k = e_{*k}.$$

Значит, оператором перехода от $\widetilde{\mathbf{e}}$ к $\mathbf{e}_*$ служит $B_* B^{-1}$. Имеем:

$$\det B_* B^{-1} = \frac{\det B_*}{\det B} = -\frac{1}{\det B} > 0.$$

Мы показали, что каждый базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ попадает либо в первый класс эквивалентности (содержащий $\mathbf{e}$), либо во второй (содержащий $\mathbf{e}_*$). Значит, классов эквивалентности ровно два. □

Замечание 2.5. *В комплексном конечномерном линейном пространстве нет понятия ориентации. Ориентация — чисто вещественный эффект.*

2.3. **Характеристический многочлен и спектр линейного оператора.**

Определение 2.6. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, где $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$. Пусть $A\in\Lambda(E)$. Характеристическим многочленом оператора A называется многочлен*

$$d_A(\lambda)=\det(A-\lambda I).$$

Равносильное определение: характеристическим многочленом оператора A называется характеристический многочлен его изображающей матрицы a (в каком-либо базисе). При переходе к другому базису изображающая матрица меняется по закону подобия (см. (1.6)), а характеристический многочлен является инвариантом подобия. Поэтому такое определение корректно.

Вспомним разложение характеристического многочлена:

$$d_A(\lambda)=\delta_n\lambda^n+\delta_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+\delta_1\lambda+\delta_0, \qquad (2.5)$$

где $\delta_n=(-1)^n$, $\delta_{n-1}=(-1)^{n-1}\operatorname{Tr}A$, $\delta_0=\det A$.

Замечание 2.7. *В вещественном случае необходимо сделать комментарий. Оператор $A-\lambda I$ имеет смысл лишь при $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда многочлен $d_A(\lambda)$ исходно определен при $\lambda\in\mathbb{R}$. Но после того, как мы записали его в виде* (2.5)*, нет проблем распространить этот многочлен на все значения $\lambda\in\mathbb{C}$. В случае второго определения можно сразу считать, что $\lambda\in\mathbb{C}$.*

Определение 2.8. *Собственными значениями (собственными числами) оператора A называются корни характеристического многочлена $d_A(\lambda)$.*

Если $K=\mathbb{R}$, то $d_A(\lambda)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, но его корни могут оказаться комплексными числами с $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$.

Есть два (основных) способа нумерации собстенных значений. *Первый способ*: пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — все собственные значения, причем кратные корни многочлена $d_A(\lambda)$ повторяются столько раз, какова их кратность. Тогда разложение характеристического многочлена на множители имеет вид

$$d_A(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

Второй способ: пусть $\mu_1,\dots,\mu_p$ — все различные собственные значения, а $\sigma_1,\dots,\sigma_p$ — их кратности. Разумеется, $\sigma_1+\dots+\sigma_p=n$. Тогда разложение характеристического многочлена на множители имеет вид

$$d_A(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\mu_1)^{\sigma_1}\cdots(\lambda-\mu_p)^{\sigma_p}.$$

Определение 2.9. *Алгебраической кратностью собственного значения* μ_j *оператора* A *называется кратность корня* μ_j *характеристического многочлена* $d_A(\lambda)$*, то есть, число* σ_j.

Определение 2.10. *Если* $\sigma_j = 1$*, то собственное значение* μ_j *оператора* A *называется простым. Если* $\sigma_j > 1$*, то собственное значение* μ_j *оператора* A *называется кратным.*

В следующем параграфе будет введено понятие другой кратности — геометрической кратности собственного значения.