Дистанционное обучение. Лекция 10.
23 апреля 2020 года

2.4. Ортогональная сумма. Ортогональное дополнение.

Определение 2.8. *Подпространства F и G в комплексном евклидовом пространстве E называются ортогональными (пишем $F \perp G$), если $(f, g) = 0$ при любых $f \in F$ и $g \in G$.*

Как и в вещественном случае, пересечение ортогональных подпространств F и G в комплексном евклидовом пространстве E тривиально: $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, а потому линейная сумма $F + G$ является прямой суммой.

Определение 2.9. *Прямая сумма $F \dot{+} G$ ортогональных подпространств F и G называется ортогональной суммой и обозначается $F \oplus G$.*

Определение 2.10. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E. Ортогональным дополнением подпространства F называется множество*

$$F^{\perp} := \{g \in E : (g, f) = 0, \ \forall f \in F\}.$$

Предложение 2.11. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства F. Тогда справедливы следующие свойства*:

1) $F^{\perp}$ — *подпространство в* E;
2) F *и* $F^{\perp}$ — *ортогональные подпространства*;
3) $F \oplus F^{\perp} = E$;
4) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Определение 2.12. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Для элемента $x \in E$ в представлении $x = f + g$, где $f \in F$, $g \in F^{\perp}$, элемент f называется ортогональной проекцией x на F, а g называется ортогональной составляющей.*

2.5. Изоморфизм комплексных евклидовых пространств.

Определение 2.13. *Пусть E_1 и E_2 — два комплексных евклидовых пространства. Говорят, что E_2 изоморфно E_1, если существует линейное взаимно-однозначное отображение $J : E_1 \to E_2$ такое, что*

$$(Jx, Jy)_{E_2} = (x, y)_{E_1}, \quad \forall x, y \in E_1.$$

Проверьте самостоятельно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на классе всех комплексных евклидовых пространств.

Очевидно, если E_2 изоморфно E_1 в смысле данного определения, то автоматически E_1 и E_2 будут изоморфными линейными пространствами.

Теорема 2.14. *Любое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Фиксируем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в E. Рассмотрим отображение $J : E \to \mathbb{C}^n$, определенное по правилу:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k \ \mapsto\ Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Мы знаем, что это отображение линейное и взаимнооднозначное. Проверим, что J сохраняет скалярное произведение.

Пусть $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. В силу предложения 2.6 в ортонормированном базисе скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y)_E = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Имеем

$$Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad Jy = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения векторов в $\mathbb{C}^n$ выполнено

$$(Jx, Jy)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Следовательно,

$$(x, y)_E = (Jx, Jy)_{\mathbb{C}^n}, \quad x, y \in E.$$

$\square$

§ 3. Линейные операторы в комплексном евклидовом пространстве

3.1. **Линейные операторы и полуторалинейные формы.** Мы установим взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и полуторалинейными формами в комплексном евклидовом пространстве E.

Определение 3.1. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Полуторалинейной формой оператора A называется форма $Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$, определенная по правилу*

$$Q_A(x,y) := (Ax, y), \quad x, y \in E. \tag{3.1}$$

Предложение 3.2. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Отображение $J : \Lambda(E) \to \widetilde{\mathcal{F}}(E)$, определенное по правилу $JA = Q_A$, где Q_A определено в (3.1), является изоморфизмом линейных пространств $\Lambda(E)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$.*

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Следствие 3.3. *В комплексном евклидовом пространстве E для любой полуторалинейной формы $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ существует единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $Q = Q_A$, то есть, $Q(x,y) = (Ax, y)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 3.4. *Пусть E — комплексное евклидово пространство и $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Пусть $Q = Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — полуторалинейная форма оператора A, а $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q_A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда $a = q$.*

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Замечание 3.5. 1) *Если базис $\mathbf{e}$ не ортонормированный, то утверждение неверно. То есть, $a \neq q$ в общем случае.*
2) *Предложение 3.4 дает конструктивный способ построить оператор A по заданной форме Q. Надо найти изображающую матрицу q формы Q в каком-либо ортонормированном базисе и построить оператор A, имеющий ту же изображающую матрицу $a = q$ в этом базисе.*

Вспомним, что в вещественном евклидовом пространстве, зная квадратичную форму $Q_A(x,x)$, $x \in E$, можно восстановить лишь симметричную часть оператора. Иначе обстоит дело в комплексном евклидовом пространстве.

Предложение 3.6. *В комплексном евклидовом пространстве E любой оператор $A \in \Lambda(E)$ однозначно восстанавливается по квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и пусть $Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — отвечающая ему полуторалинейная форма: $Q_A(x,y) = (Ax,y)$, $x,y \in E$.

Предположим, что мы знаем значения квадратичной формы $Q_A(x,x) = (Ax,x)$ при всех $x \in E$. По квадратичной форме однозначно восстанавливается полуторалинейная форма (см. предложение 1.6). А по полуторалинейной форме однозначно восстанавливается оператор (см. следствие 3.3). $\square$

Следствие 3.7. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть для операторов $A, B \in \Lambda(E)$ совпадают квадратичные формы*: $(Ax,x) = (Bx,x)$, $x \in E$. *Тогда $B = A$.*

3.2. **Сопряженный оператор.**

Определение 3.8. *Пусть $A \in \Lambda(E)$. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется сопряженным к оператору A, если $(Ax,y) = (x,By)$ при любых $x,y \in E$.*

Предложение 3.9. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует единственный сопряженный оператор $B \in \Lambda(E)$.*

Доказательство. Докажем существование сопряженного оператора. Оператору A отвечает полуторалинейная форма Q_A. Рассмотрим сопряженную форму Q_A^*. Ей отвечает оператор B. Проверим, что B является сопряженным к оператору A. Имеем:

$$(Ax,y) = Q_A(x,y) = \overline{Q_A^*(y,x)} = \overline{(By,x)} = (x,By), \quad x,y \in E.$$

Единственность сопряженного оператора проверяется по аналогии с вещественным случаем. $\square$

Для сопряженного оператора к оператору A используем обозначение $B = A^*$.

Свойства сопряженного оператора

- Полулинейность операции сопряжения:

  $$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*, \quad A_1, A_2 \in \Lambda(E),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- Выполнено равенство
$$(A^*)^* = A.$$
- Правило транспонирования композиции операторов:
$$(AC)^* = C^*A^*, \quad A, C \in \Lambda(E).$$
- Выполнено равенство
$$I^* = I.$$
- Если $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора A^* в базисе $\mathbf{e}$ служит a^*.
- У операторов A и A^* следы и определители взаимно сопряжены:
$$\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}, \quad \det A^* = \overline{\det A}.$$
- Характеристические многочлены операторов A и A^* удовлетворяют соотношению
$$d_{A^*}(\lambda) = \overline{d_A(\overline{\lambda})}.$$
- Спектры операторов A и A^* взаимно сопряжены: если μ_j — собственное значение оператора A алгебраической кратности σ_j, то $\overline{\mu_j}$ является собственным значением оператора A^* той же кратности σ_j.

Доказательство. Проверим два последних свойства. Остальные свойства проверьте самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Имеем:
$$d_{A^*}(\lambda) = \det(A^* - \lambda I) = \det(A - \overline{\lambda} I)^* = \overline{\det(A - \overline{\lambda} I)} = \overline{d_A(\overline{\lambda})}.$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные собственные значения оператора A, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности. Тогда
$$d_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}.$$
Следовательно,
$$\begin{aligned} d_{A^*}(\lambda) = \overline{d_A(\overline{\lambda})} &= (-1)^n \overline{(\overline{\lambda} - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\overline{\lambda} - \mu_p)^{\sigma_p}} \\ &= (-1)^n (\lambda - \overline{\mu_1})^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \overline{\mu_p})^{\sigma_p}. \end{aligned}$$
Следовательно, различные собственные значения оператора A^* — это числа $\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_p}$, а их кратности равны $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$.
$\square$

3.3. **Образ оператора A и ядро сопряженного оператора A^*.**

Теорема 3.10. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Для любого $A \in \Lambda(E)$ образ оператора A и ядро сопряженного оператора A^* являются ортогональными подпространствами и их ортогональная сумма равна всему пространству E:*

$$\operatorname{Ran} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку равносильных соотношений:

$$g \in \operatorname{Ker} A^* \;\Leftrightarrow\; A^*g = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (A^*g, x) = 0,\ \forall x \in E$$
$$\Leftrightarrow\; (g, Ax) = 0,\ \forall x \in E \;\Leftrightarrow\; g \perp \operatorname{Ran} A \;\Leftrightarrow\; g \in (\operatorname{Ran} A)^{\perp}.$$

Следовательно, $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ran} A)^{\perp}$, то есть, выполнено (3.2). □

Замечание 3.11. 1) *Уравнение $Ax = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{Ran} A$, то есть, $f \perp \operatorname{Ker} A^*$. Иначе говоря, условие разрешимости состоит в ортогональности правой части f ко всем решениям z однородного сопряженного уравнения $A^*z = \mathbf{0}$.*

2) *Применяя этот результат в случае $E = \mathbb{C}^n$ и оператора $A = \widehat{a}$ умножения на матрицу $a \in M^n$, получаем условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $a\vec{x} = \vec{f}$:*

$$\vec{f} \perp \vec{z} \;\; \textit{для любого решения} \;\; \vec{z} \;\; \textit{системы} \;\; a^*\vec{z} = \vec{0}.$$

3.4. **Ортопроекторы.** Пусть E — комплексное евклидово пространство, F — подпространство пространства E, $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Обозначим $n = \dim E$, $m = \dim F$. Тогда $E = F \oplus F^{\perp}$ и любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Рассмотрим оператор P, сопоставляющий вектору x его ортогональную проекцию f на подпространство F: $Px = f$. Точно так же, как в вещественном случае, проверяется, что P — линейный оператор.

Определение 3.12. *Оператор $P \in \Lambda(E)$, сопоставляющий вектору $x \in E$ его ортогональную проекцию f на подпространство F, называется ортогональным проектором или ортопроектором на подпространство F.*

Замечание 3.13. *Если P — ортопроектор на подпространство F, то $P^{\perp} = I - P$ — ортопроектор на подпространство $F^{\perp}$.*

Явное описание ортопроектора P на подпространство F можно дать, если выбрать какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \dots, f_m\}$ в подпространстве F. Тогда по аналогии с вещественным случаем получаем

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j.$$

§ 4. Самосопряженные и унитарные операторы

4.1. **Самосопряженные операторы.** Пусть E — комплексное евклидово пространство.

Определение 4.1. *Оператор $A \in \Lambda(E)$ называется самосопряженным, если $A^* = A$.*

Замечание 4.2. *Антисамосопряженным оператором называется оператор $B \in \Lambda(E)$ такой, что $B^* = -B$. Однако, этим понятием пользуются редко, поскольку всегда можно представить антисамосопряженный оператор в виде $B = iA$, где $A^* = A$.*

Предложение 4.3. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Любой оператор $C \in \Lambda(E)$ однозначно представляется в виде $C = A + iB$, где $A^* = A$ и $B^* = B$.*

Доказательство. Для доказательства существования положим

$$A = \frac{1}{2}(C + C^*), \quad B = \frac{1}{2i}(C - C^*). \tag{4.1}$$

Очевидно, выполнены равенства $A^* = A$, $B^* = B$ и $C = A + iB$.

Теперь проверим единственность. Пусть $C = A + iB$, где $A^* = A$ и $B^* = B$. Тогда $C^* = A^* - iB^* = A - iB$. Таким образом, выполнены равенства

$$C = A + iB, \quad C^* = A - iB.$$

Складывая эти равенства, получаем $2A = C + C^*$, а вычитая второе равенство из первого, имеем $2iB = C - C^*$. В итоге мы пришли к прежним выражениям (4.1). Это рассуждение доказывает единственность представления. □

Определение 4.4. *Оператор $A = \frac{1}{2}(C + C^*)$ называется вещественной частью оператора C и обозначается $A = \operatorname{Re} C$, оператор $B = \frac{1}{2i}(C - C^*)$ называется мнимой частью оператора C и обозначается $B = \operatorname{Im} C$.*

Предложение 4.5. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $A \in \Lambda(E)$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его квадратичная форма вещественна*:

$$(Ax, x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E. \tag{4.2}$$

Доказательство. Необходимость. Дано: $A^* = A$. Тогда

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \;\Rightarrow\; (Ax, x) \in \mathbb{R},\; x \in E.$$

Достаточность. Дано: выполнено (4.2). Тогда

$$(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = \overline{(x, A^*x)} = (A^*x, x), \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, квадратичные формы для операторов A и A^* совпадают. В силу следствия 3.7 получаем $A^* = A$. $\square$

Предложение 4.6. *Для любого оператора $C \in \Lambda(E)$ операторы C^*C и CC^* самосопряжены.*

Доказательство. В силу правила сопряжения композиции операторов имеем: $(C^*C)^* = C^*(C^*)^* = C^*C$. Тем самым, оператор C^*C самосопряжен. Аналогично проверяется самосопряженность оператора CC^*. $\square$

Предложение 4.7. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Оператор $A \in \Lambda(E)$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его изображающая матрица a в базисе $\mathbf{e}$ эрмитова.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда изображающей матрицей оператора A^* в базисе $\mathbf{e}$ является a^*. Очевидно, $A^* = A$ равносильно равенству $a^* = a$. $\square$

Предложение 4.8. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Тогда все собственные значения оператора A вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора A. Поскольку E — комплексное пространство, найдется собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$. Имеем: $Af = \lambda f$. Умножим обе части равенства скалярно на f. Тогда $(Af, f) = \lambda(f, f)$. Следовательно,

$$\lambda = \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}.$$

В силу предложения 4.5 для самосопряженного оператора выполнено $(Af, f) \in \mathbb{R}$. Учитывая, что $\|f\|^2 > 0$, получаем $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Предложение 4.9. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Предположим, что λ и μ — различные собственные значения оператора A, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы*: $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$. *Тогда $f \perp g$.*

Доказательство. Умножим обе части равенства $Af = \lambda f$ скалярно на g:

$$(Af, g) = \lambda(f, g). \tag{4.3}$$

Умножим обе части равенства $Ag = \mu g$ скалярно на f:

$$(f, Ag) = (f, \mu g) = \mu(f, g). \tag{4.4}$$

Мы учли, что собственное значение μ вещественно. В силу самосопряженности оператора A имеем $(Af, g) = (f, Ag)$. Отсюда и из (4.3) и (4.4) вытекает, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0.$$

По условию $\lambda \neq \mu$, а потому $(f, g) = 0$. □

Пример. Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Пусть задана эрмитова матрица $a \in M^n$. Тогда оператор $A = \widehat{a}$ умножения на матрицу a самосопряжен. Достаточно сослаться на то, что изображающей матрицей оператора A в стандартном базисе является сама матрица a, и применить предложение 4.7. Следовательно, *собственные значения эрмитовой матрицы вещественны* (в первом семестре этот факт сообщался без доказательства), а *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны в $\mathbb{C}^n$*.

Предложение 4.10. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда собственные значения оператора A вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и a — изображающая матрица оператора A в этом базисе. Поскольку $A^t = A$, то a — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда a — эрмитова матрица (любая вещественная симметричная матрица является эрмитовой). Мы знаем, что собственные значения эрмитовой матрицы вещественны, а собственные значения оператора A совпадают с собственными значениями изображающей матрицы a.

2) Пусть λ и μ — различные собственные значения оператора A, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы: $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$. Имеем:

$$(Af, g) = \lambda(f, g), \quad (f, Ag) = \mu(f, g).$$

В силу симметричности оператора A выполнено $(Af, g) = (f, Ag)$. Следовательно, $(\lambda - \mu)(f, g) = 0$. Поскольку $\lambda - \mu \neq 0$, получаем $(f, g) = 0$. $\square$