Дистанционное обучение. Лекция 11.
27 апреля 2020 года

4.2. Унитарные операторы. Понятие унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве аналогично понятию изометрического оператора в вещественном евклидовом пространстве.

Определение 4.11. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $U \in \Lambda(E)$ называется унитарным, если U сохраняет скалярное произведение, то есть,*

$$(Ux, Uy) = (x, y), \quad \forall x, y \in E. \tag{4.5}$$

Предложение 4.12. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $U \in \Lambda(E)$ является унитарным тогда и только тогда, когда U сохраняет норму, то есть, $\|Ux\| = \|x\|$ при всех $x \in E$.*

Доказательство. Необходимость очевидна: из (4.5) при $y = x$ следует, что $\|Ux\| = \|x\|$.

Докажем достаточность. Пусть U сохраняет норму. Пусть $x, y \in E$. Имеем:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2, \tag{4.6}$$

$$\|U(x + y)\|^2 = \|Ux\|^2 + 2\operatorname{Re}(Ux, Uy) + \|Uy\|^2. \tag{4.7}$$

Поскольку $\|Ux\| = \|x\|$, $\|Uy\| = \|y\|$, $\|U(x + y)\| = \|x + y\|$, из (4.6), (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(Ux, Uy) &= \|U(x + y)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\operatorname{Re}(x, y). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Im}(x, y) + \|y\|^2, \tag{4.8}$$

$$\|U(x + iy)\|^2 = \|Ux\|^2 + 2\operatorname{Im}(Ux, Uy) + \|Uy\|^2. \tag{4.9}$$

Поскольку $\|Ux\| = \|x\|$, $\|Uy\| = \|y\|$, $\|U(x+iy)\| = \|x+iy\|$, из (4.8), (4.9) следует, что

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Im}(Ux, Uy) &= \|U(x + iy)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2 \\ &= \|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\operatorname{Im}(x, y). \end{aligned}$$

Мы показали, что $\operatorname{Re}(Ux, Uy) = \operatorname{Re}(x, y)$ и $\operatorname{Im}(Ux, Uy) = \operatorname{Im}(x, y)$. Следовательно, $(Ux, Uy) = (x, y)$. Это означает, что U — унитарный оператор. $\square$

Следствие 4.13. *Унитарный оператор U является автоморфизмом пространства E.*

Докажите самостоятельно следующие четыре предложения по аналогии с вещественным случаем.

Предложение 4.14. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $U \in \Lambda(E)$. Следующие свойства равносильны*:

1) U — *унитарный оператор*;
2) $U^*U = I$;
3) $UU^* = I$;
4) $U^{-1} = U^*$.

Предложение 4.15. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть* $\mathbf{e}$ — *ортонормированный базис в E. Пусть $U \in \Lambda(E)$ и $u \in M^n$ — его изображающая матрица в базисе* $\mathbf{e}$. *Оператор U является унитарным тогда и только тогда, когда матрица u унитарна.*

Предложение 4.16. *Множество всех унитарных операторов в комплексном евклидовом пространстве E образует группу* (*относительно умножения*).

Предложение 4.17. *Определитель унитарного оператора U по модулю равен единице*: $|\det U| = 1$.

Замечание 4.18. 1) *Множество унитарных операторов с определителем* $\det U = 1$ *образует подгруппу группы всех унитарных операторов в E.*

2) *Группа всех унитарных операторов в n-мерном комплексном евклидовом пространстве E изоморфна группе $U(n)$ унитарных матриц порядка n. Группа унитарных операторов с* $\det U = 1$ *в пространстве E изоморфна группе $SU(n)$.*

Предложение 4.19. *Собственные значения унитарного оператора U по модулю равны единице.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение унитарного оператора U. Поскольку E — комплексное пространство, то существует собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$ такой, что $Uf = \lambda f$. Тогда $\|Uf\| = |\lambda|\|f\|$. Поскольку оператор U унитарен, то $\|Uf\| = \|f\|$. Следовательно, $|\lambda|\|f\| = \|f\|$. В силу $\|f\| > 0$ получаем $|\lambda| = 1$. $\square$

Предложение 4.20. *Собственные векторы унитарного оператора U, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ и μ — различные собственные значения оператора U, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы. Тогда $Uf = \lambda f$, $Ug = \mu g$, а следовательно, $U^{-1}g = \mu^{-1}g$. (Мы учли, что оператор U обратим и число μ обратимо.) Имеем

$$(Uf, g) = \lambda(f, g), \quad (f, U^*g) = (f, U^{-1}g) = (f, \mu^{-1}g) = \overline{\mu}^{-1}(f, g).$$

Мы использовали свойство $U^* = U^{-1}$. Поскольку $|\mu|^2 = 1$, то $\mu\overline{\mu} = 1$, откуда $\overline{\mu}^{-1} = \mu$. Учитывая равенство $(Uf, g) = (f, U^*g)$, получаем $(\lambda - \mu)(f, g) = 0$. В силу $\lambda - \mu \neq 0$ отсюда следует, что $(f, g) = 0$. □

Пример. Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Пусть задана унитарная матрица $u \in M^n$. Тогда оператор $U = \widehat{u}$ умножения на матрицу u унитарен. Достаточно сослаться на то, что изображающей матрицей оператора U в стандартном базисе является сама матрица u, и применить предложение 4.15. Следовательно, *собственные значения унитарной матрицы по модулю равны* 1 (в первом семестре этот факт сообщался без доказательства), а *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны в* $\mathbb{C}^n$.

Предложение 4.21. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Собственные значения изометрического оператора V по модулю равны единице.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $v \in M^n$ — изображающая матрица оператора V в этом базисе. Поскольку V — изометрический оператор, то v — ортогональная матрица. Тогда v — унитарная матрица (любая ортогональная матрица является унитарной). Мы знаем, что собственные значения унитарной матрицы по модулю равны 1, а собственные значения оператора V совпадают с собственными значениями изображающей матрицы v. □

Замечание 4.22. *Если изометрический оператор V в вещественном евклидовом пространстве имеет различные вещественные собственные значения $\lambda = 1$ и $\mu = -1$, то отвечающие им собственные векторы взаимно ортогональны. Доказательство аналогично доказательству предложения* 4.20. *Разумеется, у невещественных собственных значений оператора V никаких собственных векторов нет.*

4.3. Преобразование ортонормированных базисов в комплексном евклидовом пространстве. Пусть E — комплексное евклидово пространство. Считаем, что $\dim E = n \geqslant 1$.

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ — два ортонормированных базиса в E. Напомним, что оператор перехода B от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ определяется по правилу $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$ — это матрица перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Имеем:

$$\text{если } \ x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \ \text{ то } \ Bx = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \widetilde{e}_k.$$

Поскольку оба базиса ортонормированы, в силу предложения 1.8 выполнены равенства

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2, \quad \|Bx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2.$$

Следовательно,

$$\|Bx\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, *если оба базиса ортонормированы, то оператор перехода B — унитарный, а матрица перехода b унитарная.*

Вспомним закон преобразования изображающих матриц линейных операторов в E: если оператор A имеет изображающую матрицу a в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{a}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.

Вспомним закон преобразования изображающих матриц полуторалинейных форм: если форма $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ имеет изображающую матрицу q в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{q}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{q} = b^* q b$.

Поскольку $b^{-1} = b^*$, то *законы преобразования изображающих матриц линейных операторов и полуторалинейных форм в комплексном евклидовом пространстве совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

§ 5. Диагонализация самосопряженных и унитарных операторов

5.1. **Диагонализация самосопряженных операторов.**

Теорема 5.1. *Пусть E — комплексное евклидово пространство, $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Тогда в E существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Процесс состоит из n шагов.

Шаг 1. Рассмотрим характеристический многочлен $d_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Он имеет хотя бы один корень λ_1. Это собственное значение оператора A. Отметим, что $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ в силу предложения 4.8. Существует собственный вектор $f_1 \in E$, $f_1 \neq \mathbf{0}$, отвечающий собственному значению λ_1: $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Будем считать, что $\|f_1\| = 1$ (этого всегда можно добиться за счет нормировки: деления некоторого собственного вектора на его норму). Если $n = 1$, то процесс закончен. Если $n > 1$, продолжаем процесс.

Шаг 2. Рассмотрим подпространство

$$E_2 := \{x \in E : \ x \perp f_1\}.$$

То есть, E_2 — это ортогональное дополнение одномерного подпространства $F_1 = \{cf_1, \ c \in \mathbb{C}\}$. Имеем $\dim E_2 = n - 1$. Проверим, что подпространство E_2 инвариантно относительно действия оператора A: если $x \in E_2$, то $Ax \in E_2$. Действительно, пусть $x \in E_2$, то есть, $x \perp f_1$. Тогда

$$(Ax, f_1) = (x, Af_1) = \lambda_1(x, f_1) = 0.$$

Мы учли, что $A^* = A$ и $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Таким образом, $Ax \perp f_1$, то есть, $Ax \in E_2$. Тогда корректно определен оператор $A_2 \in \Lambda(E_2)$, являющийся сужением оператора A на подпространство E_2: $A_2 x = Ax$, $x \in E_2$. Оператор A_2 самосопряжен в пространстве E_2, поскольку его квадратичная форма вещественна: $(A_2 x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$, $x \in E_2$ (см. предложение 4.5). У оператора A_2 существует хотя бы одно собственное значение λ_2 (автоматически $\lambda_2 \in \mathbb{R}$). Существует собственный вектор $f_2 \in E_2$: $A_2 f_2 = \lambda_2 f_2$. Мы сразу выбираем его нормированным: $\|f_2\| = 1$. Тогда автоматически выполнено $Af_2 = \lambda_2 f_2$ и $f_2 \perp f_1$. Если $n = 2$, то искомый базис $\{f_1, f_2\}$ построен. Если $n > 2$, продолжаем процесс.

На k-ом шаге (где $k \leqslant n$) строится подпространство

$$E_k = \{x \in E : x \perp f_1, \dots, f_{k-1}\}, \quad \dim E_k = n - k + 1,$$

где $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \dots, k-1$, и векторы $f_1, \dots, f_{k-1}$ попарно ортогональны и нормированы. Проверяется, что это подпространство инвариантно относительно оператора A. Рассматривается оператор $A_k \in \Lambda(E_k)$, определенный как сужение оператора A на E_k. Он самосопряжен. У него есть хотя бы одно собственное значение λ_k и отвечающий ему (нормированный) собственный вектор f_k. Автоматически выполнено $Af_k = \lambda_k f_k$ и $f_k \perp f_j$, $j = 1, \dots, k-1$.

Процесс заканчивается на n-ом шаге. В результате в пространстве E построен ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов оператора A:

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что автоматически собственные значения вещественны: $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. (Среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ могут быть повторяющиеся.) Изображающая матрица a оператора A в базисе $\mathbf{f}$ диагональна:

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Теорема 5.2. *Пусть E — вещественное евклидово пространство, $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда в E существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Докажите теорему самостоятельно по аналогии с доказательством теоремы 5.1. Важно учесть, что заведомо все собственные значения оператора A вещественны; см. предложение 4.10. Каждому вещественному собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор (в вещественном пространстве существенно знать априори, что собственные значения вещественны).

5.2. **Спектральное разложение самосопряженного оператора.** Итак, мы доказали, что для самосопряженного оператора A существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (собственные значения) и существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ в E, причем $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \dots, n$.

Разложим произвольный вектор $x \in E$ по базису $\mathbf{f}$: $x = \sum_{j=1}^n \xi^j f_j$. В силу предложения 2.6 выполнено $\xi^j = (x, f_j)$. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^n \xi^j A f_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi^j f_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, f_j) f_j.$$

Эту формулу принято записывать в виде

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\cdot, f_j) f_j \tag{5.1}$$

и называвать *спектральным разложением самосопряженного оператора A*.

Разложение (5.1) можно записать иначе, используя другой способ нумерации собственных значений. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_p$ — все различные собственные значения оператора A, а $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ — их кратности ($\sum_{l=1}^{p} \sigma_l = n$). Поскольку оператор диагонализуем, то алгебраические кратности совпадают с геометрическими. Тогда каждое из чисел λ_j совпадает с одним (и только одним) из чисел μ_l. Базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ можно перегруппировать, объединяя собственные векторы, отвечающие одному и тому же значению μ_l, в l-ую группу (в этой группе будет σ_l векторов). Всего будет p групп. Тогда при новой нумерации мы получим ортонормированный базис

$$f_1^{(1)}, \dots, f_{\sigma_1}^{(1)}; f_1^{(2)}, \dots, f_{\sigma_2}^{(2)}; \dots; f_1^{(p)}, \dots, f_{\sigma_p}^{(p)}.$$

При этом

$$Af_k^{(l)} = \mu_l f_k^{(l)}, \qquad l = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, \sigma_l.$$

Тогда разложение (5.1) принимает вид

$$A = \sum_{l=1}^{p} \mu_l \sum_{k=1}^{\sigma_l} (\cdot, f_k^{(l)}) f_k^{(l)}. \tag{5.2}$$

Заметим, что векторы $f_1^{(l)}, \dots, f_{\sigma_l}^{(l)}$ образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F_l = \mathrm{Ker}(A - \mu_l I)$, отвечающем собственному значению μ_l. Оператор

$$P_l = \sum_{k=1}^{\sigma_l} (\cdot, f_k^{(l)}) f_k^{(l)}$$

— это ортопроектор на подпространство F_l. Тогда спектральное разложение (5.2) можно записать в виде

$$A = \sum_{l=1}^{p} \mu_l P_l. \tag{5.3}$$