

**5.3. Диагонализация унитарных операторов.** Для унитарных операторов справедлив аналог теоремы 5.1.

**Теорема 5.3** Пусть  $E$  — комплексное евклидово пространство,  $\dim E = n \geq 1$ . Пусть  $U \in \Lambda(E)$  — унитарный оператор. Тогда в  $E$  существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $U$ .

*Доказательство.* Доказательство похоже на доказательство теоремы 5.1. Процесс состоит из  $n$  шагов.

*Шаг 1.* Рассмотрим характеристический многочлен  $d_U(\lambda) = \det(U - \lambda I)$ . Он имеет хотя бы один корень  $\lambda_1$ . Это собственное значение оператора  $U$ . Отметим, что  $|\lambda_1| = 1$  в силу предложения 4.19. Существует собственный вектор  $f_1 \in E$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_1$ :  $Uf_1 = \lambda_1 f_1$ . Будем считать, что  $\|f_1\| = 1$ . Если  $n = 1$ , то процесс закончен. Если  $n > 1$ , продолжаем процесс.

*Шаг 2.* Рассмотрим подпространство

$$E_2 := \{x \in E : x \perp f_1\}, \quad \dim E_2 = n - 1.$$

Проверим, что подпространство  $E_2$  инвариантно относительно действия оператора  $U$ : если  $x \in E_2$ , то  $Ux \in E_2$ . Действительно, пусть  $x \in E_2$ , то есть,  $x \perp f_1$ . Тогда

$$(Ux, f_1) = (x, U^* f_1) = (x, U^{-1} f_1) = (x, \lambda_1^{-1} f_1) = \lambda_1^{-1} (x, f_1) = 0.$$

Мы учли, что  $U^* = U^{-1}$  и  $U^{-1} f_1 = \lambda_1^{-1} f_1$  (а также равенство  $(\overline{\lambda_1})^{-1} = \lambda_1$ ). Таким образом,  $Ux \perp f_1$ , то есть,  $Ux \in E_2$ . Тогда корректно определен оператор  $U_2 \in \Lambda(E_2)$ , являющийся сужением оператора  $U$  на подпространство  $E_2$ :  $U_2 x = Ux$ ,  $x \in E_2$ . Оператор  $U_2$  унитарен в пространстве  $E_2$ , поскольку он сохраняет норму:  $\|U_2 x\| = \|Ux\| = \|x\|$ ,  $x \in E_2$  (см. предложение 4.12). У оператора  $U_2$  существует хотя бы одно собственное значение  $\lambda_2$  (автоматически  $|\lambda_2| = 1$ ). Существует собственный вектор  $f_2 \in E_2$ :  $U_2 f_2 = \lambda_2 f_2$ . Мы сразу выбираем его нормированным:  $\|f_2\| = 1$ . Тогда автоматически выполнено  $Uf_2 = \lambda_2 f_2$  и  $f_2 \perp f_1$ . Если  $n = 2$ , то искомый базис  $\{f_1, f_2\}$  построен. Если  $n > 2$ , продолжаем процесс.

На  $k$ -ом шаге (где  $k \leq n$ ) строится подпространство

$$E_k = \{x \in E : x \perp f_1, \dots, f_{k-1}\}, \quad \dim E_k = n - k + 1,$$

где  $Uf_j = \lambda_j f_j$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , и векторы  $f_1, \dots, f_{k-1}$  попарно ортогональны и нормированы. Проверяется, что это подпространство инвариантно относительно оператора  $U$ . Рассматривается оператор  $U_k \in \Lambda(E_k)$ , определенный как сужение оператора  $U$  на  $E_k$ . Он унитарен. У него есть хотя бы одно собственное значение  $\lambda_k$  и отвечающий ему (нормированный) собственный вектор  $f_k$ . Автоматически выполнено  $Uf_k = \lambda_k f_k$  и  $f_k \perp f_j$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ .

Процесс заканчивается на  $n$ -ом шаге. В результате в пространстве  $E$  построен ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$  из собственных векторов оператора  $U$ :

$$Uf_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что автоматически  $|\lambda_j| = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . (Среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  могут быть повторяющиеся.) Изображающая матрица  $u$  оператора  $U$  в базисе  $\mathbf{f}$  диагональна:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

**Замечание 5.4** Отметим, что аналога теоремы 5.3 для изометрических операторов в вещественном евклидовом пространстве нет. Причина в том, что изометрический оператор  $V$  может иметь не вещественные собственные значения. Если хотя бы одно такое собственное значение имеется, то оператор  $V$  заведомо не диагонализуем. Исключение представляет случай, когда изометрический оператор  $V$  имеет только вещественные собственные значения (это могут быть числа 1 или  $-1$ ). В этом случае справедлив аналог теоремы 5.3.

#### 5.4. Спектральное разложение унитарного оператора.

Итак, мы доказали, что для унитарного оператора  $U$  существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , такие что  $|\lambda_j| = 1$ , (собственные значения) и существует ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$  в  $E$ , причем  $Uf_j = \lambda_j f_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

По аналогии с (5.1) получаем разложение

$$U = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\cdot, f_j) f_j, \quad (5.4)$$

которое называют *спектральным разложением унитарного оператора*  $U$ .

Разложение (5.4) можно записать иначе, используя другой способ нумерации собственных значений. Пусть  $\mu_1, \dots, \mu_p$  — все различные собственные значения оператора  $U$ . По аналогии с (5.3) получаем

$$U = \sum_{l=1}^p \mu_l P_l,$$

где  $P_l$  — ортопроектор на собственное подпространство  $F_l = \text{Ker}(A - \mu_l I)$ .

**5.5. Диагонализация эрмитовых матриц.** Рассмотрим эрмитову матрицу  $a \in M^n$ . Пусть  $E = \mathbb{C}^n$  и  $A = \hat{a}$  — оператор умножения на матрицу  $a$ . Пусть  $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  — стандартный базис в  $\mathbb{C}^n$ , то есть,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изображающей матрицей оператора  $A$  в базисе  $\mathbf{e}$  является сама матрица  $a$ .

В силу предложения 4.7 оператор  $A$  самосопряжен. Применяя теорему 5.1, получаем, что существуют вещественные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  в  $\mathbb{C}^n$  такие, что

$$a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Изображающая матрица  $\tilde{a}$  оператора  $A$  в базисе  $\mathbf{f}$  диагональна:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Мы знаем закон преобразования  $\tilde{a} = b^{-1}ab$ , где  $b$  — матрица перехода от стандартного базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$ . Матрица  $b$  составлена из столбцов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ . Эта матрица унитарна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату, который формулируется на матричном языке.

**Теорема 5.5** Пусть  $a \in M^n$  — эрмитова матрица. Тогда существуют диагональная матрица  $\tilde{a} \in M^n$  с вещественными элементами и унитарная матрица  $b \in M^n$  такие, что  $\tilde{a} = b^{-1}ab$ .

Одновременно мы получили практический способ диагонализации эрмитовой матрицы. Надо найти собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и ортонормированный базис из собственных векторов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , так что  $a\vec{f}_j = \lambda_j\vec{f}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда матрица  $\tilde{a}$  имеет вид (5.5), а матрица  $b$  составлена из столбцов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ .

Аналогично, рассмотрим симметричную матрицу  $a \in M^n$  с вещественными элементами. Пусть  $E = \mathbb{R}^n$  и  $A = \hat{a}$  — оператор умножения на матрицу  $a$ . Пусть  $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Изображающей матрицей оператора  $A$  в базисе  $\mathbf{e}$  является сама матрица  $a$ .

Оператор  $A$  симметричен. Применяя теорему 5.2, получаем, что существуют вещественные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  в  $\mathbb{R}^n$  такие, что

$$a\vec{f}_j = \lambda_j\vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Изображающая матрица  $\tilde{a}$  оператора  $A$  в базисе  $\mathbf{f}$  диагональна и имеет вид (5.5). Тогда  $\tilde{a} = b^{-1}ab$ , где  $b$  — матрица перехода от стандартного базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$ . Матрица  $b$  составлена из столбцов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ . Эта матрица ортогональна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату.

**Теорема 5.6** Пусть  $a \in M^n$  — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда существуют диагональная матрица  $\tilde{a} \in M^n$  с вещественными элементами и ортогональная матрица  $b \in M^n$  такие, что  $\tilde{a} = b^{-1}ab$ .

**5.6. Диагонализация унитарных матриц.** Рассмотрим унитарную матрицу  $u \in M^n$ . Пусть  $E = \mathbb{C}^n$  и  $U = \hat{u}$  — оператор умножения на матрицу  $u$ . Изображающей матрицей оператора  $U$  в стандартном базисе  $\mathbf{e}$  является сама матрица  $u$ .

В силу предложения 4.15 оператор  $U$  унитарен. Применяя теорему 5.3, получаем, что существуют  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $|\lambda_j| = 1$ ) и ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  в  $\mathbb{C}^n$  такие, что

$$u\vec{f}_j = \lambda_j\vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Изображающая матрица  $\tilde{u}$  оператора  $U$  в базисе  $\mathbf{f}$  диагональна и имеет вид

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_j| = 1. \quad (5.6)$$

Тогда  $\tilde{u} = b^{-1}ub$ , где  $b$  — матрица перехода от стандартного базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$ . Матрица  $b$  составлена из столбцов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ . Эта матрица унитарна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату.

**Теорема 5.7.** Пусть  $u \in M^n$  — унитарная матрица. Тогда существуют диагональная матрица  $\tilde{u} \in M^n$  вида (5.6) и унитарная матрица  $b \in M^n$  такие, что  $\tilde{u} = b^{-1}ub$ .

**Замечание 5.8.** Отметим, что аналога теоремы 5.7 для ортогональных матриц нет. Разумеется, ортогональная матрица  $v \in M^n$  является унитарной и к ней применима теорема 5.7. Тем самым, она диагонализуема в классе комплексных матриц. Но в классе вещественных матриц диагонализации нет за исключением случая, когда все собственные значения матрицы  $v$  вещественны, то есть, равны 1 или  $-1$ .

## § 6. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К СУММЕ КВАДРАТОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КООРДИНАТ

**6.1. Приведение симметричной формы к простейшему виду в вещественном евклидовом пространстве.** Пусть  $E$  — вещественное евклидово пространство. Пусть  $Q \in \mathcal{F}(E)$  — симметричная билинейная форма. Мы знаем, что  $Q(x, y)$  можно привести к “сумме одноименных произведений” (а квадратичную форму  $Q(x, x)$  — к сумме квадратов). Сейчас мы опишем новый способ приведения формы  $Q$  к простейшему виду: покажем, как это сделать за счет ортогонального преобразования координат.

Билинейной форме  $Q$  отвечает единственный оператор  $A \in \Lambda(E)$  такой, что

$$Q(x, y) = (Ax, y), \quad x, y \in E.$$

Поскольку форма  $Q$  симметрична, то оператор  $A$  симметричен:  $A^t = A$ .

Фиксируем ортонормированный базис  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $E$ . Пусть  $a \in M^n$  — изображающая матрица оператора  $A$  в базисе  $\mathbf{e}$  и  $q \in M^n$  — изображающая матрица формы  $Q$  в базисе  $\mathbf{e}$ . В силу предложения 3.4  $a = q$ .

Применим теорему 5.2 к оператору  $A$ . Существуют вещественные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (собственные значения оператора  $A$ ) и ортонормированный базис из собственных векторов  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ . Имеем  $Af_j = \lambda_j f_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . В базисе  $\mathbf{f}$

изображающая матрица  $\tilde{a}$  оператора  $A$  диагональна:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода  $b \in M^n$  от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$  является ортогональной матрицей. Вспомним закон преобразования  $\tilde{a} = b^{-1}ab$ . Форма  $Q$  имеет изображающую матрицу  $\tilde{q}$  в базисе  $\mathbf{f}$ . Закон преобразования:  $\tilde{q} = b^tqb$ . Законы преобразования изображающих матриц для оператора  $A$  и для формы  $Q$  сейчас совпадают, поскольку  $b^{-1} = b^t$ . Таким образом,  $\tilde{q} = \tilde{a}$ . Тогда квадратичная форма  $Q(x, x)$  в базисе  $\mathbf{f}$  имеет вид суммы квадратов

$$Q(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\tilde{\xi}^k)^2, \quad x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k f_k.$$

Вспомним закон преобразования координат вектора  $x$  при переходе от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$ . Пусть вектор  $x \in E$  имеет разложение  $x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$  в базисе  $\mathbf{e}$  и разложение  $x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k f_k$  в базисе  $\mathbf{f}$ . Тогда  $\vec{x} = b\vec{\tilde{x}}$ , что равносильно  $\vec{\tilde{x}} = b^{-1}\vec{x} = b^t\vec{x}$ . Здесь

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}^n \end{pmatrix}.$$

**6.2. Применение к классификации поверхностей второго порядка в  $\mathbb{R}^3$ .** В  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим стандартный базис  $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , где

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим уравнение второго порядка относительно декартовых координат вектора  $\vec{x} = \xi^1 \vec{e}_1 + \xi^2 \vec{e}_2 + \xi^3 \vec{e}_3$  в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\sum_{k,l=1}^3 q_{kl} \xi^k \xi^l + \sum_{j=1}^3 \beta_j \xi^j + \gamma = 0. \quad (6.1)$$

Здесь  $q_{kl}, \beta_j, \gamma \in \mathbb{R}$  ( $k, l, j = 1, 2, 3$ ) — заданные коэффициенты, причем  $q_{kl} = q_{lk}$ .

Сначала рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{k,l=1}^3 q_{kl} \xi^k \xi^l.$$

Изображающей матрицей этой формы в базисе  $\mathbf{e}$  является симметричная вещественная матрица

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  матрицы  $q$  вещественны и что существует ортонормированный базис  $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  из собственных векторов матрицы  $q$ :

$$q\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Матрица перехода  $b \in M^3$  от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$  состоит из столбцов  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  и является ортогональной матрицей:  $b^{-1} = b^t$ . Разложим вектор  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  в новом базисе:  $\vec{x} = \eta^1 \vec{f}_1 + \eta^2 \vec{f}_2 + \eta^3 \vec{f}_3$ . Связь старых и новых координат дается законом

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = b^t \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

В новых координатах квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \lambda_3(\eta^3)^2.$$

Используя связь координат (6.2), можно преобразовать линейные члены:  $\sum_{j=1}^3 \beta_j \xi^j = \sum_{i=1}^3 \tilde{\beta}_i \eta^i$ . Тогда уравнение (6.1) принимает вид

$$\lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \lambda_3(\eta^3)^2 + \sum_{i=1}^3 \tilde{\beta}_i \eta^i + \gamma = 0. \quad (6.3)$$

**Замечание 6.1.** Если  $\lambda_j \neq 0$ , то линейный член  $\tilde{\beta}_j \eta^j$  можно “убрать” за счет параллельного переноса. Сделаем замену

$$\zeta^j = \eta^j + \frac{\tilde{\beta}_j}{2\lambda_j} \Rightarrow (\zeta^j)^2 = (\eta^j)^2 + \frac{\tilde{\beta}_j}{\lambda_j} \eta^j + \left( \frac{\tilde{\beta}_j}{2\lambda_j} \right)^2.$$

Тогда  $\lambda_j(\eta^j)^2 + \tilde{\beta}_j \eta^j = \lambda_j(\zeta^j)^2 + \gamma_j$ .

6.3. **Центральные поверхности.** Рассмотрим **случай I**, когда

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$$

Тогда все линейные члены можно убрать и уравнение (6.3) приводится к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tilde{\gamma} = 0. \quad (6.4)$$

(Вместо  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$  мы стали использовать более привычные в аналитической геометрии обозначения координат  $x, y, z$ .) Легко убедиться, что поверхность, заданная уравнением (6.4), имеет три оси симметрии (оси координат) и центр симметрии (начало координат). Отсюда название “центральные поверхности”.

**Случай I.1.** Пусть числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  одного знака. Без ограничения общности считаем, что они положительны:

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

(Если они отрицательны, то домножим уравнение на  $-1$ ).

Случай I.1a). Если  $\tilde{\gamma} > 0$ , то получим пустое множество.

Случай I.1б). Если  $\tilde{\gamma} = 0$ , то получим одну точку  $x = y = z = 0$ .

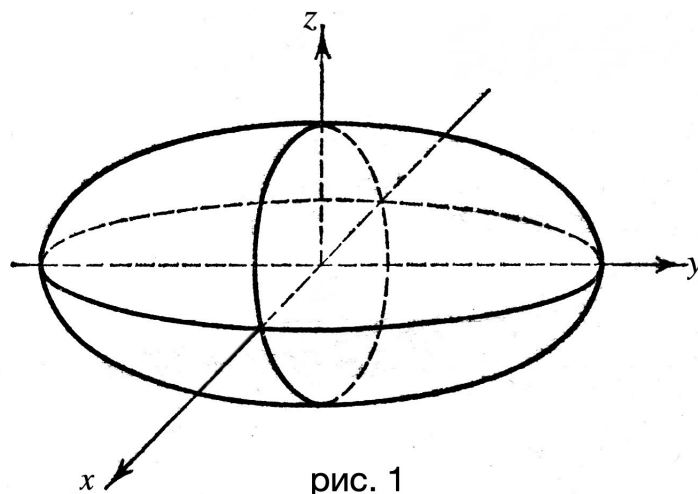
Случай I.1в). Если  $\tilde{\gamma} < 0$ , то получим *эллипсоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_3}.$$

См. рис. 1. Сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям, это эллипсы. Поверхность целиком находится в параллелепипеде  $\{(x, y, z) : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$ . Точки  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(0, \pm b, 0)$ ,  $(0, 0, \pm c)$  (точки пересечения поверхности с осями симметрии) называются вершинами эллипсоида.

Частные случаи: если  $a = b = c$ , то это сфера; если  $a = b$ , то это эллипсоид вращения вокруг третьей оси; и пр.





**Случай I.2.** Пусть одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  отличается знаком от двух других. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0.$$

Случай I.2a). Если  $\tilde{\gamma} < 0$ , то получим *однополостной гиперboloид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 2. Сечение плоскостью  $Oxy$  — это эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

— так называемое “горлышко” гиперboloида. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости  $Oxy$ ) — это эллипсы (они расширяются с ростом  $|z|$ ). Сечения координатными плоскостями  $Oyz, Oxz$  — это гиперболы:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0.$$

Поверхность связная (отсюда название “однополостной”) и неограниченная.

Частный случай: если  $a = b$ , то это поверхность вращения.

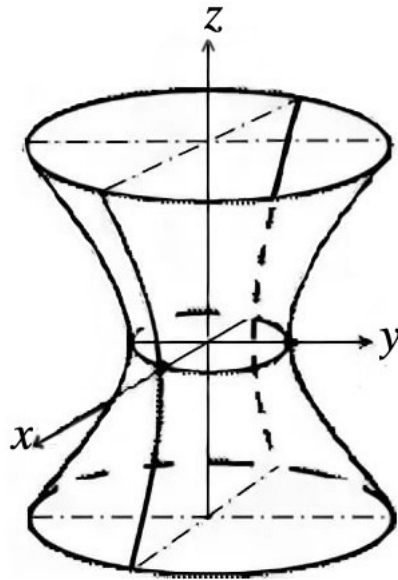


рис. 2

Случай I.26). Если  $\tilde{\gamma} = 0$ , то получим конус:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 3. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости  $Oxy$ ) — это эллипсы. Сечения координатными плоскостями  $Oyz$ ,  $Oxz$  — это пара пересекающихся прямых:

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}, \quad x = 0; \quad \frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c}, \quad y = 0.$$

Точка  $(0, 0, 0)$  — вершина конуса.

Частный случай: если  $a = b$ , то это круговой конус.

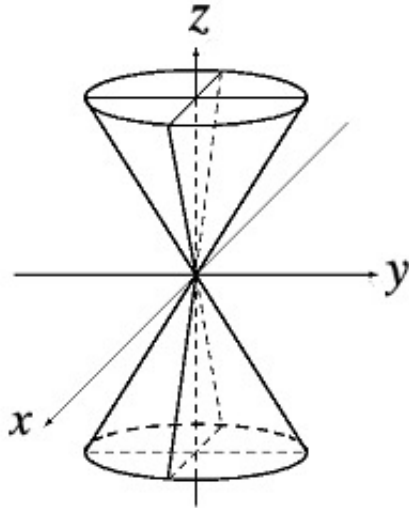


рис. 3

Случай I.2в). Если  $\tilde{\gamma} > 0$ , то получим *двуполостной гиперболоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a^2 = \frac{\tilde{\gamma}}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{\tilde{\gamma}}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{\tilde{\gamma}}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 4. Поверхность состоит из двух связанных частей (отсюда название — двуполостной) и неограничена. В слое  $|z| < c$  нет точек поверхности. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости  $Oxy$ ) — это эллипсы. Сечения координатными плоскостями  $Oyz$ ,  $Oxz$  — это гиперболы:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0; \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad y = 0.$$

Поверхность имеет две вершины  $(0, 0, c)$ ,  $(0, 0, -c)$ .

Частный случай: если  $a = b$ , то это поверхность вращения.

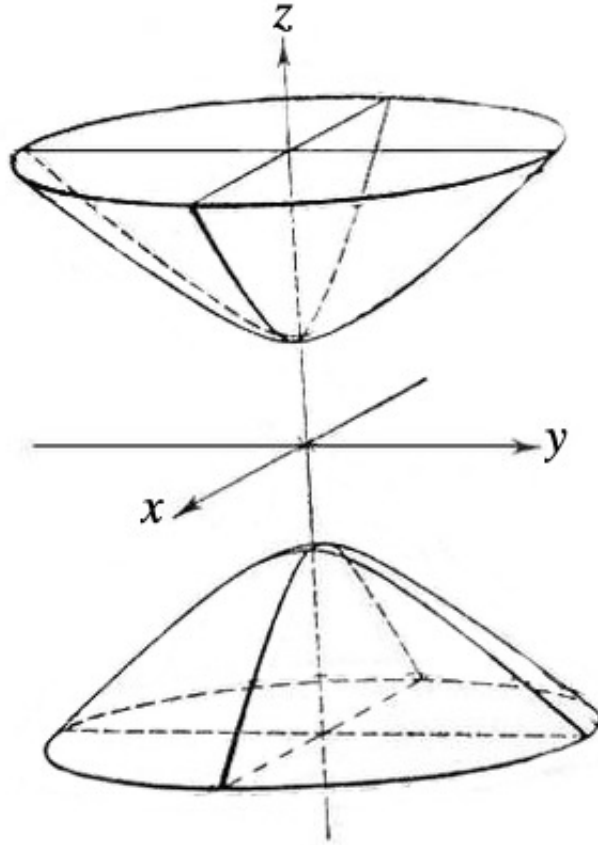


рис. 4

6.4. **Нецентральные поверхности.** Рассмотрим **случай II**, когда одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  равно нулю. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Тогда в уравнении (6.3) можно убрать линейные члены с  $\eta^1, \eta^2$ . Уравнение принимает вид

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \lambda_2(\zeta^2)^2 + \tilde{\beta}_3\zeta^3 + \tilde{\gamma} = 0. \quad (6.5)$$

**Случай II.1.** Пусть  $\tilde{\beta}_3 \neq 0$ . Тогда можно убрать свободный член в (6.5) за счет параллельного переноса:

$$\tilde{\zeta}^3 = \zeta^3 + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}_3} \Rightarrow \lambda_1(\zeta^1)^2 + \lambda_2(\zeta^2)^2 + \tilde{\beta}_3\tilde{\zeta}^3 = 0.$$

Мы пришли к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tilde{\beta}_3 z = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \tilde{\beta}_3 \neq 0.$$

Эта поверхность имеет ось симметрии (ось  $Oz$ ), но не имеет центра симметрии, отсюда название “нецентральная” поверхность.

Случай II.1a). Пусть числа  $\lambda_1, \lambda_2$  одного знака. Без ограничения общности считаем, что  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . Будем считать, что  $\tilde{\beta}_3 < 0$  (иначе изменим направление третьей оси на противоположное). Получаем *эллиптический параболоид*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\beta}_3|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\beta}_3|}{\lambda_2}.$$

См. рис. 5. Поверхность целиком расположена в полупространстве  $z \geq 0$  и неограничена. Горизонтальные сечения — эллипсы. Сечения координатными плоскостями  $Oxz, Oyz$  — параболы:

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \quad y = 0; \quad z = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = 0.$$

Поверхность имеет одну вершину  $(0, 0, 0)$ .

Частный случай: если  $a = b$ , это круговой параболоид (поверхность вращения).

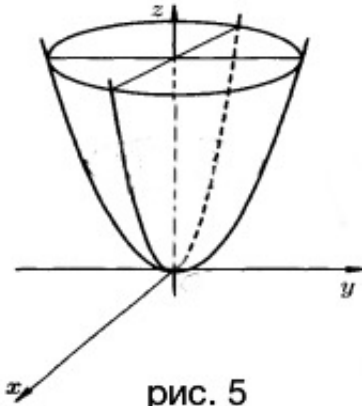


рис. 5

Случай II.1б). Пусть числа  $\lambda_1, \lambda_2$  разных знаков. Без ограничения общности считаем, что  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Будем считать, что  $\tilde{\beta}_3 < 0$ . Получаем *гиперболический параболоид*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\beta}_3|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\beta}_3|}{|\lambda_2|}.$$

См. рис. 6. Поверхность неограничена и имеет форму седла. Седловая точка  $(0, 0, 0)$ . Горизонтальные сечения — гиперболы (при  $z > 0$  ось  $Ox$  — действительная ось, а  $Oy$  — мнимая ось

гиперболы; при  $z < 0$  ось  $Ox$  — мнимая ось, а  $Oy$  — действительная ось гиперболы). Сечения координатными плоскостями  $Oxz, Oyz$  — параболы:

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \quad y = 0; \quad z = -\frac{y^2}{b^2}, \quad x = 0.$$

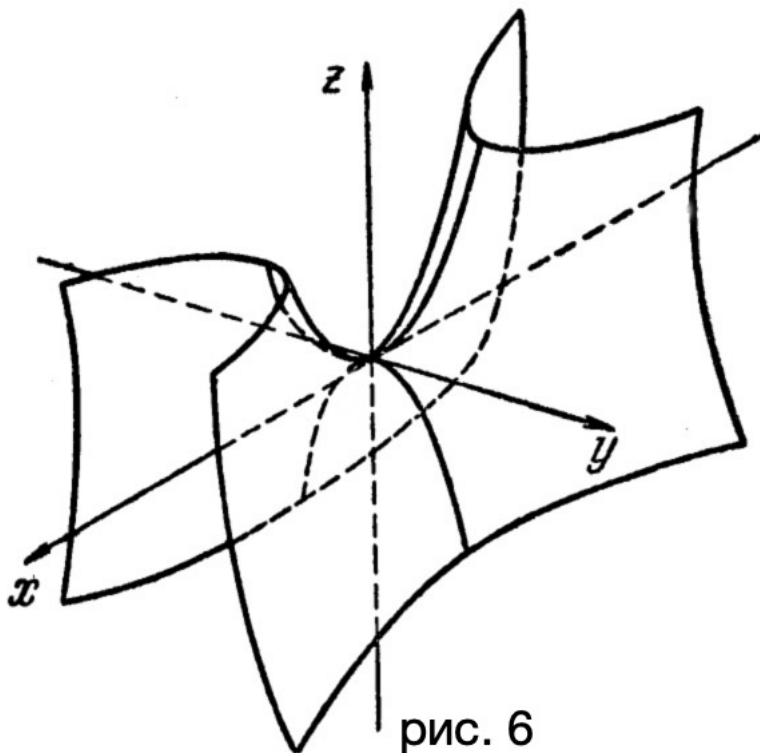


рис. 6

**Случай II.2.** Пусть теперь  $\tilde{\beta}_3 = 0$  в уравнении (6.5). Тогда уравнение принимает вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tilde{\gamma} = 0. \quad (6.6)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $\lambda_1, \lambda_2$  — числа одного знака. Можно считать, что

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Случай II.2а). Если  $\tilde{\gamma} > 0$ , то получим пустое множество.

Случай II.2б). Если  $\tilde{\gamma} = 0$ , то получим прямую  $x = y = 0$ .

Случай II.2в). Если  $\tilde{\gamma} < 0$ , то получим *эллиптический цилиндр*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_2}.$$

См. рис. 7. Горизонтальное сечение поверхности — это один и тот же эллипс при всех  $z$ . Ось цилиндра — ось  $Oz$ .

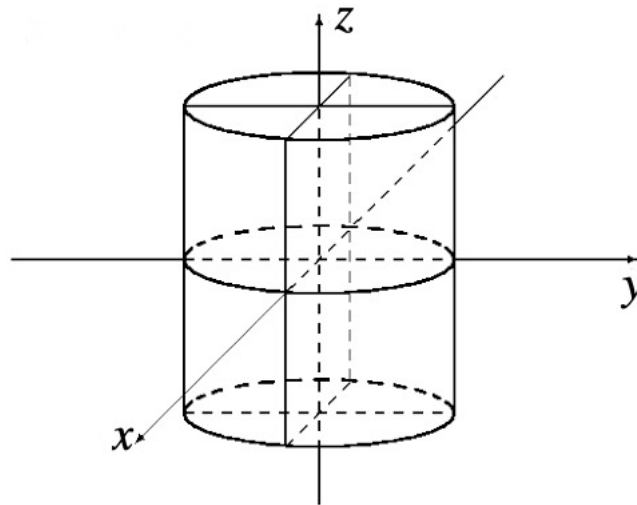


рис. 7

Пусть теперь числа  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют разные знаки: считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Случай II.2г). Если  $\tilde{\gamma} \neq 0$  (пусть для определенности  $\tilde{\gamma} < 0$ ), то получим *гиперболический цилиндр*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\gamma}|}{|\lambda_2|}.$$

См. рис. 8. Горизонтальное сечение поверхности — это одна и та же гипербола при всех  $z$ . Ось цилиндра — ось  $Oz$ .

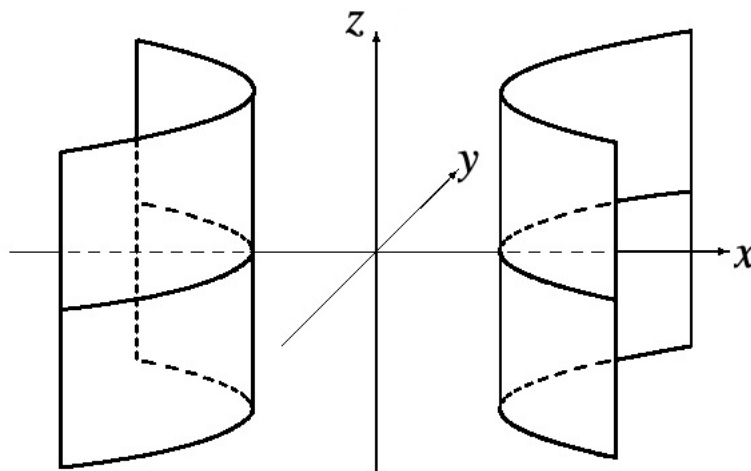


рис. 8

Случай II.2д). Если  $\tilde{\gamma} = 0$ , то получим пару пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}.$$

**6.5. Случай III.** Осталось рассмотреть случай III, когда только одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  отлично от нуля. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Тогда в уравнении (6.3) можно убрать линейный член с  $\eta^1$ . Уравнение принимает вид

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \tilde{\beta}_2\zeta^2 + \tilde{\beta}_3\zeta^3 + \tilde{\gamma} = 0. \quad (6.7)$$

Случай III.1. Если линейные члены здесь не равны нулю тождественно (то есть, хотя бы один из коэффициентов  $\tilde{\beta}_2$  и  $\tilde{\beta}_3$  отличен от нуля), то поворотом в плоскости переменных  $\zeta^2, \zeta^3$  можно добиться, чтобы линейный член был только один:

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \hat{\beta}_2\hat{\zeta}^2 + \tilde{\gamma} = 0, \quad \hat{\beta}_2 \neq 0.$$

Наконец, за счет параллельного переноса можно устранить свободный член:

$$\check{\zeta}^2 = \hat{\zeta}^2 + \frac{\tilde{\gamma}}{\hat{\beta}_2} \Rightarrow \lambda_1(\zeta^1)^2 + \hat{\beta}_2\check{\zeta}^2 = 0.$$

Мы пришли к уравнению

$$\lambda_1x^2 + \hat{\beta}_2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda_1}{\hat{\beta}_2}x^2.$$

Это *параболический цилиндр*. См. рис. 9. Горизонтальное сечение поверхности — это одна и та же парабола при всех  $z$ . Ось цилиндра — ось  $Oz$ .



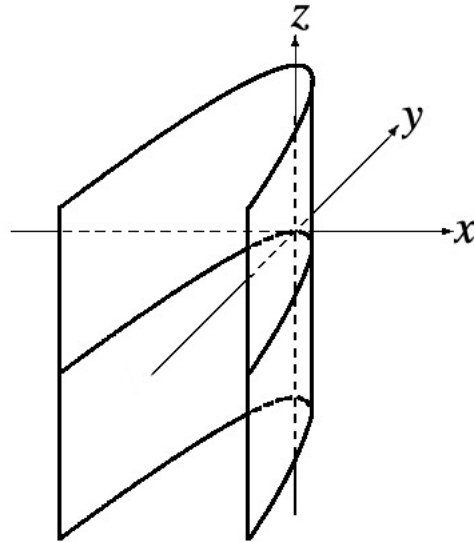


рис. 9

Случай III.2. Пусть линейные члены в (6.7) равны нулю:  $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = 0$ . Тогда приходим к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \tilde{\gamma} = 0.$$

Считаем  $\lambda_1 > 0$  (иначе домножим уравнение на  $-1$ ).

Случай III.2а). Если  $\tilde{\gamma} > 0$ , то получим пустое множество.

Случай III.2б). Если  $\tilde{\gamma} = 0$ , то получим плоскость:  $x = 0$ .

Случай III.2в). Если  $\tilde{\gamma} < 0$ , то получим пару параллельных плоскостей:

$$x = \pm \sqrt{\frac{|\tilde{\gamma}|}{\lambda_1}}.$$

Мы проанализировали все случаи. За исключением вырожденных случаев получили следующую квалификацию поверхностей второго порядка.

**Вывод.** Всего существует девять типов поверхностей второго порядка. Это четыре центральных поверхности: эллипсоид, однополостной гиперboloид, конус, двуполостной гиперboloид; два параболоида — эллиптический и гиперболический; и три цилиндрических поверхности: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.