Дистанционное обучение. Лекция 13.
7 мая 2020 года

## § 7. Обобщенная задача на собственные значения

### 7.1. **Положительно определенные операторы.**

**Определение 7.1.** *Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется положительно определенным, если $(Bx, x) > 0$ при всех $x \neq \mathbf{0}$.*

Если $B$ положительно определен, пишем $B > 0$.

**Предложение 7.2.** *Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ положительно определен тогда и только тогда, когда он самосопряжен и все его собственные значения положительны.*

*Доказательство. Необходимость.* Дано: $B > 0$. Тогда квадратичная форма $(Bx, x)$ заведомо принимает вещественные значения (фактически $(Bx, x) \geqslant 0$, $x \in E$). В силу предложения 4.5 оператор $B$ самосопряжен: $B^* = B$.

Пусть $\mu$ — собственное значение оператора $B$, $g \neq \mathbf{0}$ — собственный вектор, отвечающий $\mu$. Тогда $Bg = \mu g$. Домножим это равенство скалярно на $g$:

$$(Bg, g) = \mu \|g\|^2 \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{(Bg, g)}{\|g\|^2}.$$

Поскольку $B > 0$, то $(Bg, g) > 0$. Следовательно, $\mu > 0$.

*Достаточность.* Дано: $B^* = B$, все собственные значения $B$ положительны.

В силу теоремы 5.1 существуют вещественные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (собственные значения) и ортонормированный базис $\mathbf{g} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ из собственных векторов, так что $Bg_k = \mu_k g_k$, $k = 1, \ldots, n$. Сейчас нам дано, что $\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Разложим произвольный вектор $x \in E$ по базису $\mathbf{g}$: $x = \sum_{k=1}^n \xi^k g_k$. Тогда $Bx = \sum_{j=1}^n \mu_j \xi^j g_j$. Следовательно,

$$(Bx, x) = \sum_{k=1}^n \mu_k |\xi^k|^2.$$

Здесь все коэффициенты $\mu_k$ положительны. Если $x \neq \mathbf{0}$, то хотя бы одна координата не равна нулю: $\xi^j \neq 0$, а потому правая часть положительна. Следовательно, $B > 0$. $\square$

**Предложение 7.3.** *Если $B > 0$, то форма $\langle x, y \rangle := (Bx, y)$, $x, y \in E$, обладает всеми свойствами скалярного произведения.*

*Доказательство.* Очевидно, $\langle x, y\rangle$ — полуторалинейная форма в $E$.

Эрмитовость следует из самосопряженности оператора $B$:

$$\langle x, y\rangle = (Bx, y) = (x, By) = \overline{(By, x)} = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad x, y \in E.$$

Свойство положительной определенности вытекает из положительной определенности оператора $B$:

$$\langle x, x\rangle = (Bx, x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}.$$

$\square$

**Предложение 7.4.** *Если $B > 0$, то $\operatorname{Ker} B = \{\mathbf{0}\}$ и, следовательно, существует $B^{-1}$.*

*Доказательство.* Если $x \in \operatorname{Ker} B$, то $Bx = \mathbf{0}$. Тогда $(Bx, x) = 0$. Отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$ (поскольку при $x \neq \mathbf{0}$ выполнено $(Bx, x) > 0$. $\square$

7.2. **Обобщенная задача на собственные значения.** Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^* = A$, $B > 0$. Рассмотрим задачу

$$Ax = \lambda Bx. \tag{7.1}$$

Нас интересуют значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых существует нетривиальное решение $x \neq \mathbf{0}$ уравнения (7.1). В силу предложения 7.4 существует оператор $B^{-1}$, а потому (7.1) равносильно уравнению

$$B^{-1}Ax = \lambda x. \tag{7.2}$$

**Предложение 7.5.** *Оператор $C := B^{-1}A$ самосопряжен относительно нового скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

*Доказательство.* Рассмотрим квадратичную форму оператора $C$ (относительно нового скалярного произведения):

$$\langle Cx, x\rangle = (BCx, x) = (Ax, x), \quad x \in E.$$

Поскольку $A$ самосопряжен, то $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\langle Cx, x\rangle \in \mathbb{R}$, $x \in E$. Значит, $C$ самосопряжен относительно нового скалярного произведения. $\square$

**Теорема 7.6.** *Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^* = A$, $B > 0$. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в $E$ такие, что $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \dots, n$. При этом выполнены равенства*

$$(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}, \quad (Af_j, f_l) = \lambda_j \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n.$$

*Доказательство.* Применим теорему 5.1 к самосопряженному оператору $C$ в евклидовом пространстве $E$, снабженном новым скалярным произведением $\langle x, y\rangle$. Собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ оператора $C$ вещественны. Существует ортонормированный (по новому скалярному произведению) базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов:

$$Cf_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

Имеем

$$\langle f_j, f_l\rangle = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \tag{7.4}$$

Подставляя $C = B^{-1}A$ в (7.3), получаем $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \dots, n$. Далее, с учетом $\langle x, y\rangle = (Bx, y)$, (7.4) принимает вид $(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}$. Тогда $(Af_j, f_l) = \lambda_j(Bf_j, f_l) = \lambda_j\delta_{jl}$. □

В вещественном евклидовом пространстве $E$ также вводится понятие положительно определенного оператора $B$.

**Определение 7.7.** *Пусть $E$ — вещественное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется положительно определенным, если $B^t = B$ и $(Bx, x) > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$.*

Форму $\langle x, y\rangle = (Bx, y)$ можно принять за новое скалярное произведение в $E$. По аналогии с доказательством теоремы 7.6 докажите самостоятельно следующую теорему.

**Теорема 7.8.** *Пусть $E$ — вещественное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^t = A$, $B^t = B > 0$. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в $E$ такие, что $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \dots, n$. При этом выполнены равенства*

$$(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}, \quad (Af_j, f_l) = \lambda_j\delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n.$$

### 7.3. **Приведение эрмитовых форм к простейшему виду.**

**Теорема 7.9.** *Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — эрмитова полуторалинейная форма. Тогда существует ортонормированный базис $\{f_1, \dots, f_n\}$, в котором форма $Q$ имеет простейший вид: если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$, то*

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k},$$

*причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ при $j = 1, \dots, n$.*

*Доказательство.* Форме $Q$ отвечает единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $Q(x,y) = (Ax,y)$, $x,y \in E$. Поскольку форма $Q$ эрмитова, то $A^* = A$. Тогда в силу теоремы 5.1 существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (собственные значения) и существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов, так что

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, то $Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k f_k$. Пусть $y = \sum_{l=1} \eta^l f_l$. Поскольку базис $\mathbf{f}$ ортонормированный, имеем:

$$Q(x,y) = (Ax,y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k}.$$

□

В условиях теоремы 7.9 квадратичная форма имеет вид

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi^k|^2, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k,$$

который называют “суммой квадратов” (подразумеваются квадраты модулей координат).

Теперь мы покажем, что можно одновременно привести две формы к простейшему виду при условии, что одна из них положительно определена.

**Теорема 7.10.** *Пусть $E$ — комплексное евклидово пространство. Пусть $Q, R \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — эрмитовы полуторалинейные формы, причем*

$$R(x,x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}. \tag{7.5}$$

*Тогда существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в $E$, в котором обе формы $Q, R$ имеют простейший вид: если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$, то*

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}, \quad Q(x,y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k}, \tag{7.6}$$

*причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ при $j = 1, \dots, n$.*

*Доказательство.* Форме $Q$ отвечает единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $Q(x,y) = (Ax,y)$, $x,y \in E$. Поскольку форма $Q$ эрмитова, то $A^* = A$.

Форме $R$ отвечает единственный оператор $B \in \Lambda(E)$ такой, что $R(x,y) = (Bx,y)$, $x,y \in E$. Поскольку форма $R$ эрмитова, то $B^* = B$. Более того, из (7.5) следует, что оператор $B$ положительно определен.

В силу теоремы 7.6 существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в $E$ такие, что

$$Af_j = \lambda_j B f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

При этом выполнено

$$(Bf_k, f_l) = \delta_{kl}, \quad (Af_k, f_l) = \lambda_k \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Пусть $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$. Тогда

$$R(x,y) = (Bx, y) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} (Bf_k, f_l) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Этим доказана первая формула в (7.6). Аналогично,

$$Q(x,y) = (Ax, y) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} (Af_k, f_l) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} \lambda_k \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k},$$

что доказывает вторую формулу в (7.6). □

В условиях теоремы 7.10 обе квадратичные формы имеют вид “суммы квадратов”:

$$R(x,x) = \sum_{k=1}^n |\xi^k|^2, \quad Q(x,x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi^k|^2, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k.$$

Справедлив аналог теоремы 7.10 в вещественном евклидовом пространстве. Докажите эту теорему самостоятельно.

**Теорема 7.11.** *Пусть $E$ — вещественное евклидово пространство. Пусть $Q, R \in \mathcal{F}(E)$ — симметричные билинейные формы, причем*

$$R(x,x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}.$$

*Тогда существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в $E$, в котором обе формы $Q, R$ имеют простейший вид: если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$, то*

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \eta^k, \quad Q(x,y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \eta^k,$$

*причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ при $j = 1, \dots, n$.*

# Глава 6. Жорданова нормальная форма

## §1. Понятие о жордановой форме

Пусть $E$ — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Наша цель — найти базис в $E$, в котором изображающая матрица $a$ оператора $A$ имела бы наиболее простой вид. Идеальный вариант — чтобы матрица $a$ была диагональной. Но мы знаем, что не всякий оператор можно диагонализовать. (Для диагонализации необходимо и достаточно, чтобы для всех собственных значений совпадали алгебраические и геометрические кратности. Это равносильно существованию базиса из собственных векторов оператора $A$). Пример оператора, не допускающего диагонализацию — оператор дифференцирования в пространстве многочленов $\Omega_{n-1}$ (где $n \geqslant 2$). Напомним, что он имеет одно собственное значение $\mu = 0$, его алгебраическая кратность равна $n$, а геометрическая кратность равна 1.

Оказывается, что для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует базис, в котором изображающая матрица $a$ имеет *жорданову форму*.

**Определение 1.1.** *Верхней клеткой Жордана порядка $m$, отвечающей собственному значению $\lambda$, называется $(m \times m)$-матрица вида*

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матрица $J_m(\lambda)$ — верхнетреугольная, все диагональные элементы равны $\lambda$, параллельно диагонали идет линия из единиц, остальные элементы равны нулю. Характеристический многочлен этой матрицы равен $\det(J_m(\lambda) - tI) = (\lambda - t)^m$. Следовательно, матрица $J_m(\lambda)$ имеет единственное собственное значение $\lambda$ максимальной алгебраической кратности $\sigma = n$. Будем искать собственные векторы $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ — нетривиальное решение системы

$$J_m(\lambda)\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Leftrightarrow\; (J_m(\lambda) - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

В подробной записи система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^{m-1} \\ \xi^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi^1 \text{ произвольно} \\ \xi^2 = 0 \\ \xi^3 = 0 \\ \vdots \\ \xi^m = 0 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение системы есть

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \vec{e}_1, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Собственное подпространство $F = \operatorname{Ker}(J_m(\lambda) - \lambda I)$ одномерно, то есть, геометрическая кратность равна единице: $\tau = 1$.

При $m = 1$ матрицу $J_1(\lambda) \in M^1$ можно отождествить с числом $\lambda$. При $m \geqslant 2$ матрицу $J_m(\lambda) \in M^m$ диагонализовать нельзя, поскольку у единственного собственного значения геометрическая кратность меньше алгебраической.

**Определение 1.2.** *Ящиком порядка $\sigma$, отвечающим собственному значению $\lambda$, будем называть блочно-диагональную матрицу класса $M^\sigma$ вида*

$$L_\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{m_2}(\lambda) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J_{m_r}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_r = \sigma.$$

*Диагональные блоки $J_{m_1}(\lambda), \dots, J_{m_r}(\lambda)$ — это клетки Жордана порядков $m_1, \dots, m_r$, отвечающие одному и тому же $\lambda$. Элементы матрицы $L_\sigma(\lambda)$ вне диагональных блоков равны нулю.*

Отметим, что термин “ящик” не является общепринятым, но мы будем им пользоваться ввиду его удобства.

**Упражнение**. Проверьте, что единственным собственным значением матрицы $L_\sigma(\lambda)$ является число $\lambda$, причем его алгебраическая кратность максимальна (равна $\sigma$), а геометрическая кратность равна $r$, то есть, количеству клеток в ящике.

**Пример**. Рассмотрим ящик порядка 6, состоящий из трех клеток порядков 3, 2, 1:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен равен

$$\det(L(\lambda) - tI) = (\lambda - t)^6.$$

Единственное собственное значение $\lambda$ имеет алгебраическую кратность 6. Решая систему уравнений $(L(\lambda) - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, находим

$$\xi^2 = 0,\ \xi^3 = 0,\ \xi^4 = 0, \quad \xi^1, \xi^4, \xi^6 \in \mathbb{C} \text{ произвольны.}$$

Следовательно, геометрическая кратность $\tau = 3$, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_6$ образуют базис в собственном подпространстве.

**Определение 1.3.** *Жордановой матрицей порядка $n$ называется блочно-диагональная матрица класса $M^n$ вида*

$$J = \begin{pmatrix} L_{\sigma_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\sigma_2}(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & L_{\sigma_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p = n.$$

*Каждый диагональный блок $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$ — это ящик, отвечающий собственному значению $\lambda_j$. Считаем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ различными. Элементы матрицы $J$ вне диагональных блоков равны нулю.*

**Замечание 1.4.** *Поскольку каждый ящик $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$ состоит из нескольких жордановых клеток, отвечающих одному и тому же значению $\lambda_j$, то в конечном счете $J$ является блочно-диагональной матрицей, состоящей из жордановых клеток. Часто жордановой матрицей, по определению, называют блочно-диагональную матрицу, состоящую из жордановых клеток. За счет перестановки клеток можно объединить клетки, отвечающие одному и тому же $\lambda_j$, в ящики. Это соответствует нашему определению.*

Характеристический многочлен матрицы $J$ равен

$$d_J(t) = (\lambda_1 - t)^{\sigma_1} \cdots (\lambda_p - t)^{\sigma_p}.$$

Матрица $J$ имеет $p$ различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Их алгебраические кратности равны $\sigma_1, \dots, \sigma_p$. Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_j$ равна количеству клеток в ящике $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$.

**Примеры**.

- Рассмотрим жорданову матрицу порядка 5, состоящую из двух клеток порядков 2 и 3:
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Матрица $J$ имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = 2$ алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1 и $\lambda_2 = 3$ алгебраической кратности 3 и геометрической кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$:
$$J\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1, \quad J\vec{e}_3 = 3\vec{e}_3.$$
- Рассмотрим жорданову матрицу порядка 5, состоящую из трех клеток порядков 2, 1 и 2:
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Матрица $J$ имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = 2$ алгебраической кратности 3 и геометрической кратности 2 и $\lambda_2 = -1$ алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$:
$$J\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1, \quad J\vec{e}_3 = 2\vec{e}_3, \quad J\vec{e}_4 = -\vec{e}_4.$$

**Определение 1.5.** *Пусть $E$ — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Жордановым базисом для оператора $A$ называется такой базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ в $E$, в котором изображающая матрица $\widetilde{a} \in M^n$ оператора $A$ имеет жорданову форму.*

Наша цель в этой главе — доказать следующий фундаментальный результат.

**Теорема 1.6.** *Пусть $E$ — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n \geqslant 1$. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$*

*существует жорданов базис. При этом жорданова матрица $\widetilde{a}$ (изображающая матрица оператора $A$ в каком-либо жордановом базисе) определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

Теорема будет доказана в следующих параграфах.

Из теоремы 1.6 выводится результат о приведении произвольной комплексной матрицы $a \in M^n$ к жордановой форме. Пусть задана матрица $a \in M^n$ с комплексными элементами. Рассмотрим пространство $E = \mathbb{C}^n$ и оператор $A = \widehat{a} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на матрицу $a$. В стандартном базисе $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ изображающей матрицей оператора $A$ является сама матрица $a$. По теореме 1.6 существует жорданов базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$, в котором изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора $A$ является жордановой матрицей. Вспомним закон преобразования $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где $b$ — матрица перехода от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Матрица $b$ составлена из столбцов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Мы получаем следующую теорему, которая формулируется на матричном языке.

**Теорема 1.7.** *Для любой матрицы $a \in M^n$ с комплексными элементами существуют жорданова матрица $\widetilde{a} \in M^n$ и неособая матрица $b \in M^n$ такие, что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$. При этом жорданова матрица $\widetilde{a}$ определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

Зная собственные значения оператора $A$ и их кратности (алгебраические и геометрические), не всегда можно однозначно восстановить жорданову матрицу $\widetilde{a}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — все различные собственные значения, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности, $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — их геометрические кратности. Тогда жорданова матрица $\widetilde{a}$ состоит из $p$ ящиков, $j$-ый ящик $L_{\sigma_j}(\lambda_j) \in M^{\sigma_j}$ состоит из $\tau_j$ клеток. Но для определения размеров клеток в данном ящике, вообще говоря, нужна дополнительная информация. Какая именно информация — станет ясно в процессе доказательства теоремы 1.6.