Дистанционное обучение. Лекция 14.
11 мая 2020 года

§ 2. Вспомогательные сведения

2.1. **Взаимно-простые многочлены.**

Определение 2.1. *Многочлены $P_1(t), P_2(t)$ называются взаимно-простыми, если они не имеют общего корня.*

Лемма 2.2. *Пусть $P_1(t), P_2(t)$ — взаимно-простые многочлены. Тогда существуют многочлены $Q_1(t), Q_2(t)$ такие, что*

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) \equiv 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\deg P_1 = m$, $\deg P_2 = n$. (Здесь $\deg$ означает степень многочлена.)

Будем искать $Q_1(t)$ в виде многочлена степени не выше $n-1$ (у него n неизвестных коэффициентов) и $Q_2(t)$ в виде многочлена степени не выше $m-1$ (у него m неизвестных коэффициентов). Итого надо найти $m+n$ неизвестных. Левая часть (2.1) — многочлен степени $m+n-1$. Если в тождестве (2.1) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, то получится неоднородная система из $m+n$ линейных уравнений для $m+n$ неизвестных.

Покажем, что эта система имеет единственное решение. В силу альтернативы Фредгольма, достаточно проверить, что соответствующая однородная система, эквивалентная тождеству

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) \equiv 0, \tag{2.2}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть t_j — корень многочлена $P_1(t)$ кратности σ_j. Из (2.2) видно, что $Q_2(t)P_2(t) = -Q_1(t)P_1(t)$. Следовательно, число t_j является корнем многочлена $Q_2(t)P_2(t)$ кратности не меньше σ_j. Учитывая, что t_j не является корнем многочлена $P_2(t)$ (так как многочлены $P_1(t), P_2(t)$ взаимно простые), делаем вывод: t_j является корнем многочлена $Q_2(t)$ кратности не меньше σ_j.

У многочлена $P_1(t)$ сумма кратностей корней равна m. Мы показали, что каждый корень $P_1(t)$ является корнем $Q_2(t)$ не меньшей кратности. Получается, что сумма кратностей корней многочлена $Q_2(t)$ не меньше m. Но $\deg Q_2 \leqslant m-1$. Если $Q_2(t) \not\equiv 0$, то сумма кратностей его корней равна $m-1$. Следовательно, $Q_2(t) \equiv 0$. Аналогично проверяется, что $Q_1(t) \equiv 0$. Это означает, что однородная система уравнений имеет только тривиальное решение. □

Обобщением леммы 2.2 на случай нескольких полиномов является следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть* $P_1(t), P_2(t), \dots, P_s(t)$ *— многочлены, причем ни одно число* λ *не является корнем всех этих многочленов. Тогда существуют многочлены* $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_s(t)$ *такие, что*

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) + \dots + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. *База* уже проверена (см. лемму 2.2).

Предположение индукции: пусть для многочленов $\widetilde{P}_1(t), \dots, \widetilde{P}_{s-1}(t)$ таких, что они не имеют общего корня, существуют многочлены $\widetilde{Q}_1(t), \dots, \widetilde{Q}_{s-1}(t)$ такие, что

$$\widetilde{Q}_1(t)\widetilde{P}_1(t) + \dots + \widetilde{Q}_{s-1}(t)\widetilde{P}_{s-1}(t) \equiv 1. \qquad (2.4)$$

Индукционный переход. Пусть многочлены $P_1(t), P_2(t), \dots, P_s(t)$ не имеют общего корня.

Рассмотрим многочлены $P_1(t), P_2(t), \dots, P_{s-1}(t)$. Пусть $X(t)$ — их наибольший общий делитель. (Можно выбрать $X(t)$ вида

$$X(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_q)^{k_q},$$

где числа $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ — всевозможные общие корни этих многочленов, а $k_1, \dots, k_q$ — минимальные кратности. Тогда $(t-\lambda_j)^{k_j}$ является общим делителем этих многочленов, а $(t - \lambda_j)^{k_j+1}$ уже не является).

Тогда

$$P_j(t) = X(t)\widetilde{P}_j(t), \quad j = 1, \dots, s-1,$$

причем многочлены $\widetilde{P}_1(t), \dots, \widetilde{P}_{s-1}(t)$ уже не имеют ни одного общего корня. По предположению индукции существуют многочлены $\widetilde{Q}_1(t), \dots, \widetilde{Q}_{s-1}(t)$ такие, что выполнено (2.4). Домножая (2.4) на $X(t)$, получаем

$$\widetilde{Q}_1(t)P_1(t) + \dots + \widetilde{Q}_{s-1}(t)P_{s-1}(t) \equiv X(t). \qquad (2.5)$$

Рассмотрим теперь два многочлена — $X(t)$ и $P_s(t)$. Они взаимно простые (иначе исходный набор многочленов имел бы общий корень). Применим лемму 2.2. Существуют многочлены $Q(t)$ и $Q_s(t)$ такие, что

$$Q(t)X(t) + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1. \qquad (2.6)$$

Обозначим $Q_j(t) := Q(t)\widetilde{Q}_j(t)$, $j = 1, \dots, s-1$. Теперь из (2.5) и (2.6) вытекает, что

$$Q_1(t)P_1(t) + \dots + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1.$$

Это завершает индукционный переход. $\square$

2.2. **Лемма о нильпотентном операторе.**

Лемма 2.4. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $A \in \Lambda(E)$, причем $(A - \lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда единственным собственным значением оператора A является число λ.*

Доказательство. Поскольку $(A - \lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$, то

$$\det((A - \lambda I)^m) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\det(A - \lambda I))^m = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda I) = 0.$$

Следовательно, λ является собственным значением оператора A.

Пусть μ — собственное значение оператора A. Существует собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$ такой, что $Af = \mu f$. Тогда $(A - \lambda I)^m f = (\mu - \lambda)^m f$. Левая часть этого равенства равна $\mathbf{0}$, поскольку $(A-\lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$. Следовательно, $(\mu-\lambda)^m f = \mathbf{0}$, откуда $\mu = \lambda$. Это доказывает единственность. $\square$

§ 3. Корневые подпространства

Определение 3.1. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть λ — собственное значение оператора $A \in \Lambda(E)$. Множество*

$$E(\lambda) = \{x \in E : (A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^n$$

называется корневым подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Очевидно, если $(A - \lambda I)^k x = \mathbf{0}$ при некотором $k \leqslant n$, то $x \in E(\lambda)$. В частности, собственные векторы $f \neq \mathbf{0}$ (такие, что $Af = \lambda f$) принадлежат $E(\lambda)$. Поэтому корневое подпространство $E(\lambda)$ содержит собственное подпространство и, следовательно, $E(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Предложение 3.2. *Корневое подпространство $E(\lambda)$ является инвариантным подпространством оператора A.*

Доказательство. Пусть $x \in E(\lambda)$. Требуется доказать, что тогда $Ax \in E(\lambda)$.

Имеем: $(A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}$. Тогда $A(A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}$. Поскольку A коммутирует с любым многочленом от A, то

$$A(A - \lambda I)^n = (A - \lambda I)^n A.$$

Следовательно, $(A - \lambda I)^n Ax = \mathbf{0}$, то есть, $Ax \in E(\lambda)$. $\square$

Фундаментальным результатом является теорема разложения по корневым подпространствам.

Теорема 3.3. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — все различные собственные значения оператора A, а $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности. Пусть $E(\lambda_j)$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_j. Тогда пространство E есть прямая сумма корневых подпространств:*

$$E = E(\lambda_1) \dotplus E(\lambda_2) \dotplus \dots \dotplus E(\lambda_p).$$

При этом $\dim E(\lambda_j) = \sigma_j$. Каждое подпространство $E(\lambda_j)$ инвариантно относительно A. Оператор $A_j := A|_{E(\lambda_j)}$, действующий в $E(\lambda_j)$, имеет единственное собственное значение λ_j алгебраической кратности σ_j. Оператор $B_j := A_j - \lambda_j I$ является нильпотентным оператором, то есть, $B_j^{\sigma_j} = \mathbf{0}_{E(\lambda_j) \to E(\lambda_j)}$.

Доказательство. 1) Запишем характеристический многочлен оператора A:

$$d_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{\sigma_1} (t - \lambda_2)^{\sigma_2} \cdots (t - \lambda_p)^{\sigma_p}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим многочлены

$$P_j(t) = \Pi_{s \neq j} (t - \lambda_s)^{\sigma_s}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Тогда многочлены $P_1(t), \dots, P_p(t)$ не имеют общего корня. В силу леммы 2.3 существуют многочлены $Q_1(t), \dots, Q_p(t)$ такие, что

$$P_1(t)Q_1(t) + P_2(t)Q_2(t) + \dots + P_p(t)Q_p(t) \equiv 1. \tag{3.2}$$

2) Рассмотрим подпространства

$$F_j := \operatorname{Ran} P_j(A) Q_j(A), \quad j = 1, \dots, p. \tag{3.3}$$

Проверим, что

$$F_j \subset E(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, p. \tag{3.4}$$

Имеем

$$d_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_j)^{\sigma_j} P_j(t).$$

Следовательно,

$$d_A(A) = (-1)^n (A - \lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A).$$

В силу тождества Кэли $d_A(A) = \mathbf{0}_{E \to E}$. Получаем

$$(A - \lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A) = \mathbf{0}_{E \to E}. \tag{3.5}$$

Пусть $x \in F_j$. Тогда найдется $y \in E$ такое, что $x = P_j(A)Q_j(A)y$. С учетом (3.5)

$$(A - \lambda_j I)^{\sigma_j} x = (A - \lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A)Q_j(A)x = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Таким образом, $x \in E(\lambda_j)$. Вложение (3.4) доказано.

3) Из (3.2) следует, что

$$P_1(A)Q_1(A) + P_2(A)Q_2(A) + \cdots + P_p(A)Q_p(A) \equiv I.$$

Поэтому любой вектор $x \in E$ можно представить в виде

$$x = P_1(A)Q_1(A)x + P_2(A)Q_2(A)x + \cdots + P_p(A)Q_p(A)x.$$

Последовательные слагаемые справа принадлежат подпространствам $F_1, \ldots, F_p$, соответственно. Следовательно,

$$E = F_1 + F_2 + \cdots + F_p. \tag{3.7}$$

В силу вложений (3.4) отсюда следует, что

$$E = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots + E(\lambda_p). \tag{3.8}$$

4) Проверим теперь, что линейная сумма (3.8) является прямой суммой. Для этого нужно убедиться, что

$$E(\lambda_j) \cap \mathcal{E}_j = \{\mathbf{0}\}, \text{ где } \mathcal{E}_j := \sum_{s \neq j} E(\lambda_s), \quad j = 1, \ldots, p. \tag{3.9}$$

Пусть $x \in E(\lambda_j) \cap \mathcal{E}_j$. Поскольку $x \in E(\lambda_j)$, то

$$(A - \lambda_j I)^n x = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

С другой стороны, $x \in \mathcal{E}_j$. Это означает, что

$$x = \sum_{s \neq j} g_s, \text{ где } g_s \in E(\lambda_s).$$

Имеем $(A - \lambda_s I)^n g_s = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\Pi_{s \neq j}(A - \lambda_s I)^n x = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим многочлены $(t - \lambda_j)^n$ и $\Pi_{s \neq j}(t - \lambda_s)^n$. Они взаимно простые. По лемме 2.2 существуют многочлены $R_1(t)$ и $R_2(t)$ такие, что

$$R_1(t)(t - \lambda_j)^n + R_2(t)\Pi_{s \neq j}(t - \lambda_s)^n \equiv 1.$$

Тогда

$$R_1(A)(A - \lambda_j I)^n + R_2(A)\Pi_{s \neq j}(A - \lambda_s I)^n = I,$$

а потому

$$R_1(A)(A - \lambda_j I)^n x + R_2(A)\Pi_{s \neq j}(A - \lambda_s I)^n x = x.$$

В силу (3.10) первое слагаемое равно нулю, а в силу (3.11) второе слагаемое равно нулю. Таким образом, $x = \mathbf{0}$. Мы проверили соотношение (3.9). Отсюда следует, что сумма (3.8) является прямой суммой:

$$E = E(\lambda_1) \dotplus E(\lambda_2) \dotplus \dots \dotplus E(\lambda_p). \tag{3.12}$$

5) Из (3.7) и вложений (3.4) следует, что сумма (3.7) также прямая:

$$E = F_1 \dotplus F_2 \dotplus \dots \dotplus F_p. \tag{3.13}$$

В силу (3.12) имеем

$$\dim E(\lambda_1) + \dots + \dim E(\lambda_p) = n.$$

Из (3.13) следует, что

$$\dim F_1 + \dots + \dim F_p = n.$$

Следовательно,

$$\dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim E(\lambda_1) + \dots + \dim E(\lambda_p). \tag{3.14}$$

Поскольку $F_j \subset E(\lambda_j)$, то $\dim F_j \leqslant \dim E(\lambda_j)$, и равенство (3.14) может выполняться только в случае

$$\dim F_j = \dim E(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Отсюда следует, что

$$F_j = E(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

6) В силу предложения 3.2 подпространства $E(\lambda_j)$ инвариантны относительно оператора A. Рассмотрим оператор $A_j = A|_{E(\lambda_j)}$. В силу (3.6) для любого вектора $x \in F_j = E(\lambda_j)$ выполнено $(A - \lambda_j I)^{\sigma_j} x = \mathbf{0}$. Это означает, что

$$(A_j - \lambda_j I)^{\sigma_j} = \mathbf{0}_{E(\lambda_j) \to E(\lambda_j)}.$$

По лемме 2.4 число λ_j — единственное собственное значение оператора A_j.

7) Осталось найти размерности подпространств $E(\lambda_j)$. Обозначим $n_j = \dim E(\lambda_j)$. Выберем базисы в каждом подпространстве $E(\lambda_j)$. Объединение этих базисов образует базис в E. Пусть $a_j \in M^{n_j}$ — изображающая матрица оператора A_j в соответствующем базисе в $E(\lambda_j)$. Тогда изображающая матрица $a \in M^n$ оператора A в объединенном базисе имеет блочную структуру:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & a_p \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$d_A(t) = d_a(t) = d_{a_1}(t) \cdots d_{a_p}(t).$$

Поскольку λ_j — единственное собственное значение оператора A_j, то $d_{a_j}(t) = d_{A_j}(t) = (-1)^{n_j}(t - \lambda_j)^{n_j}$. Таким образом,

$$d_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_p)^{n_p}.$$

Сравним это с (3.1). Поскольку разложение многочлена на множители единственно, делаем вывод, что $n_j = \sigma_j$, $j = 1, \ldots, p$. Итак, доказано, что

$$\dim E(\lambda_j) = \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

$\square$