Дистанционное обучение. Лекция 15.
14 мая 2020 года

§ 4. Жорданова форма для нильпотентного оператора

Теорема разложения по корневым подпространствам сводит задачу о построении жорданова базиса для произвольного оператора к анализу операторов A_j, действующих в корневых подпространствах $E(\lambda_j)$. При этом операторы $B_j = A_j - \lambda_j I$ являются нильпотентными.

Нам остается показать, что для любого нильпотентного оператора существует жорданов базис.

Теорема 4.1. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $n = \dim E \geqslant 1$. Пусть $B \in \Lambda(E)$ — нильпотентный оператор. Тогда в E существует жорданов базис для оператора B. Изображающая матрица $b \in M^n$ оператора B в этом базисе имеет жорданову форму и определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

В случае $B = \mathbf{0}_{E\to E}$ утверждение очевидно. Будем считать, что $B \neq \mathbf{0}_{E\to E}$. Тогда нильпотентность оператора означает, что для некоторого $2 \leqslant m \leqslant n$ выполнено

$$B^m = \mathbf{0}_{E\to E}, \quad \text{но при этом } B^{m-1} \neq \mathbf{0}_{E\to E}. \tag{4.1}$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнено* (4.1). *Тогда справедливы вложения*

$$\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} B^{m-1} \subset \operatorname{Ker} B^m = E,$$

причем эти вложения строгие, то есть,

$$\dim \operatorname{Ker} B < \dim \operatorname{Ker} B^2 < \cdots < \dim \operatorname{Ker} B^{m-1} < \dim \operatorname{Ker} B^m = n.$$

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} B^k$, то $B^k x = \mathbf{0}$. Тогда $B^{k+1}x = B(B^k x) = \mathbf{0}$. Поэтому $x \in \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Следовательно,

$$\operatorname{Ker} B^k \subset \operatorname{Ker} B^{k+1}.$$

Проверим, что вложения строгие. Предположим, что $\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k+1}$ при некотором k. Тогда выполнено

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k+1} = \operatorname{Ker} B^{k+2} = \ldots$$

(ядра всех степеней B^{k+j}, $j = 1, 2, \ldots,$ совпадают). Действительно, пусть $x \in \operatorname{Ker} B^{k+2}$. Тогда $B^{k+2}x = \mathbf{0}$, то есть, $B^{k+1}(Bx) = \mathbf{0}$. Следовательно, $Bx \in \operatorname{Ker} B^{k+1} = \operatorname{Ker} B^k$. Тогда $B^{k+1}x = B^k(Bx) = \mathbf{0}$, то есть, $x \in \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Мы показали, что $\operatorname{Ker} B^{k+2} \subset \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Обратное включение верно всегда. Следовательно, $\operatorname{Ker} B^{k+2} = \operatorname{Ker} B^{k+1}$.

Поскольку выполнено (4.1), то заведомо

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} \neq \operatorname{Ker} B^{m} = E$$

и совпадение ядер начнется с $k = m$. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть G_m — какое-либо прямое дополнение подпространства* $\operatorname{Ker} B^{m-1}$ *до* $\operatorname{Ker} B^m = E$, *то есть,*

$$E = \operatorname{Ker} B^{m-1} \dotplus G_m. \tag{4.2}$$

Тогда подпространство $BG_m = \{y = Bx : \ x \in G_m\}$ лежит в некотором прямом дополнении G_{m-1} подпространства $\operatorname{Ker} B^{m-2}$ *до* $\operatorname{Ker} B^{m-1}$, *то есть,*

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus G_{m-1}, \quad BG_m \subset G_{m-1}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что
1) $BG_m \subset \operatorname{Ker} B^{m-1}$,
2) $BG_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-2} = \{\mathbf{0}\}$.

Отсюда будет следовать, что сумма $\operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m$ — прямая и является подпространством в $\operatorname{Ker} B^{m-1}$. Пусть $\widetilde{G}_{m-1}$ — какое-либо прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m$ до $\operatorname{Ker} B^{m-1}$:

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m \dotplus \widetilde{G}_{m-1}.$$

Тогда будет выполнено (4.3) при $G_{m-1} = BG_m \dotplus \widetilde{G}_{m-1}$.

Итак, проверим 1). Поскольку $B^m = \mathbf{0}_{E \to E}$, то $B^{m-1}(Bx) = B^m x = \mathbf{0}$ для любого x. Поэтому $Bx \in \operatorname{Ker} B^{m-1}$ при любом $x \in E$. В частности, отсюда следует вложение 1).

Проверим свойство 2). Пусть $y \in BG_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-2}$. Тогда найдется $x \in G_m$ такой, что $y = Bx$. При этом $y = Bx \in \operatorname{Ker} B^{m-2}$. Следовательно, $B^{m-1}x = \mathbf{0}$, то есть, $x \in \operatorname{Ker} B^{m-1}$. В силу (4.2) выполнено $G_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-1} = \{\mathbf{0}\}$. Таким образом, $x = \mathbf{0}$, а тогда и $y = \mathbf{0}$. $\square$

Обобщением леммы 4.3 является следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Найдутся подпространства G_k, $k = 1, \ldots, m$, такие, что*

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k-1} \dotplus G_k, \quad k = 2, \ldots, m; \quad \operatorname{Ker} B = G_1, \tag{4.4}$$

причем

$$BG_k \subset G_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 4.3 мы уже сделали первый шаг: проверили (4.4) при $k = m, m-1$ и (4.5) при $k = m$. Всего нужно сделать $m - 1$ шагов.

Предположим, что

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k-1} \dotplus G_k, \quad \operatorname{Ker} B^{k-1} = \operatorname{Ker} B^{k-2} \dotplus G_{k-1},$$

причем $BG_k \subset G_{k-1}$. Проверим, что тогда выполнено

1) $BG_{k-1} \subset \operatorname{Ker} B^{k-2}$,

2) $BG_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-3} = \{\mathbf{0}\}$.

Отсюда будет следовать, что сумма $\operatorname{Ker} B^{k-3} \dotplus BG_{k-1}$ — прямая и является подпространством в $\operatorname{Ker} B^{k-2}$. Пусть $\widetilde{G}_{k-2}$ — какое-либо прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} B^{k-3} \dotplus BG_{k-1}$ до $\operatorname{Ker} B^{k-2}$:

$$\operatorname{Ker} B^{k-2} = \operatorname{Ker} B^{k-3} \dotplus BG_{k-1} \dotplus \widetilde{G}_{k-2}.$$

Тогда при $G_{k-2} = BG_{k-1} \dotplus \widetilde{G}_{k-2}$ будет выполнено

$$\operatorname{Ker} B^{k-2} = \operatorname{Ker} B^{k-3} \dotplus G_{k-2}, \quad BG_{k-1} \subset G_{k-2}.$$

Итак, проверим 1). Пусть $x \in G_{k-1} \subset \operatorname{Ker} B^{k-1}$. Тогда $B^{k-1}x = \mathbf{0}$. Следовательно, $Bx \in \operatorname{Ker} B^{k-2}$.

Проверим 2). Пусть $y \in BG_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-3}$. Тогда существует $x \in G_{k-1}$ такой, что $y = Bx$. При этом $y = Bx \in \operatorname{Ker} B^{k-3}$. Следовательно, $B^{k-2}x = \mathbf{0}$, то есть, $x \in \operatorname{Ker} B^{k-2}$. По нашему предположению, $G_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-2} = \{\mathbf{0}\}$. Следовательно, $x = \mathbf{0}$.

На последнем шаге мы придем к соотношениям

$$\operatorname{Ker} B^2 = \operatorname{Ker} B \dotplus G_2, \quad \operatorname{Ker} B = G_1, \quad BG_2 \subset G_1.$$

$\square$

В итоге мы пришли к разложению пространства E в прямую сумму подпространств G_j:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Ker} B^m = \operatorname{Ker} B^{m-1} \dotplus G_m = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus G_{m-1} \dotplus G_m = \dots \\ &= G_1 \dotplus G_2 \dotplus \dots \dotplus G_m. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Обозначим $k_j := \dim G_j$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$k_j = \dim \operatorname{Ker} B^j - \dim \operatorname{Ker} B^{j-1}, \quad j = 2, \dots, m; \quad k_1 := \dim \operatorname{Ker} B.$$

С учетом леммы 4.2 и (4.6) имеем

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, \quad k_j > 0.$$

Лемма 4.5. *Пусть $x_1, \dots, x_s \in G_j$ — линейно независимый набор. Здесь $j \geqslant 2$. Тогда набор $Bx_1, \dots, Bx_s \in G_{j-1}$ также является линейно независимым.*

Доказательство. Предположим, что

$$\alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2 + \dots + \alpha_s Bx_s = \mathbf{0}.$$

Тогда $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s) = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s \in \operatorname{Ker} B = G_1.$$

С другой стороны, по условию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s \in G_j$ при $j \geqslant 2$. Поскольку $G_j \cap G_1 = \{\mathbf{0}\}$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = \mathbf{0}$. По условию, набор $x_1, \dots, x_s$ линейно независимый. Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$. $\square$

Следствие 4.6. *Размерности* $k_j = \dim G_j$ *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < k_m \leqslant k_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant k_2 \leqslant k_1.$$

Перейдем теперь к *доказательству теоремы* 4.1. Построим жорданов базис для оператора B, опираясь на разложение

$$E = G_1 \dotplus G_2 \dotplus \dots \dotplus G_{m-1} \dotplus G_m,$$

и вложения $BG_j \subset G_{j-1}$.

Шаг 1. Выберем какой-либо базис

$$g_1^{(m)}, \dots, g_{k_m}^{(m)}$$

в подпространстве G_m.

Шаг 2. Рассмотрим векторы

$$Bg_1^{(m)} =: g_1^{(m-1)}, \dots, Bg_{k_m}^{(m)} =: g_{k_m}^{(m-1)} \in G_{m-1}.$$

В силу леммы 4.5 этот набор линейно независим. Дополним его как-либо до базиса в G_{m-1}:

$$g_1^{(m-1)}, \dots, g_{k_m}^{(m-1)}; g_{k_m+1}^{(m-1)}, \dots, g_{k_{m-1}}^{(m-1)}.$$

(Разумеется, в случае $k_{m-1} = k_m$ дополнять не требуется.)

Продолжаем процесс. На l-ом шаге будут построены базисы в подпространствах $G_m, G_{m-1}, \dots, G_{m-l+1}$. При этом базис в G_j ($j = m, \dots, m-l+1$) имеет вид

$$g_1^{(j)}, \dots, g_{k_j}^{(j)}, \text{ причем } g_i^{(j)} = Bg_i^{(j+1)}, \quad i = 1, \dots, k_{j+1}.$$

При этом используется такая терминология: если $g_i^{(j)} = Bg_i^{(j+1)}$, то вектор $g_i^{(j+1)}$ называют присоединенным к вектору $g_i^{(j)}$.

Шаг $l+1$. Мы рассматриваем векторы

$$Bg_1^{(m-l+1)} =: g_1^{(m-l)}, \dots, Bg_{k_{m-l+1}}^{(m-l+1)} =: g_{k_{m-l+1}}^{(m-l)} \in G_{m-l}.$$

В силу леммы 4.5 этот набор линейно независим. Дополним его как-либо до базиса в G_{m-l}:

$$g_1^{(m-l)}, \dots, g_{k_{m-l+1}}^{(m-l)}; g_{k_{m-l+1}+1}^{(m-l)}, \dots, g_{k_{m-l}}^{(m-l)}.$$

Всего требуется m шагов. Объединение базисов, построенных в подпространствах $G_m, \dots, G_1$, после правильной перенумерации и будет жордановым базисом. Изображающую матрицу оператора B в этом базисе обозначим $b \in M^n$. Она по построению будет иметь блочно-диагональный вид.

Нумерацию следует начать с группы 1:

$$g^{(1)}_{k_2+1}, \dots, g^{(1)}_{k_1} \in G_1 = \operatorname{Ker} B.$$

Это собственные векторы, у которых нет присоединенных. В матрице b каждому вектору из группы 1 отвечает жорданова клетка (0) размера 1×1 (поскольку $Bg^{(1)}_i = \mathbf{0}$). Итого имеем (k_1-k_2) клеток размера 1×1.

Группа 2: рассматриваем пары

$$g^{(1)}_{k_3+1}, g^{(2)}_{k_3+1}; \dots ; g^{(1)}_{k_2}, g^{(2)}_{k_2}.$$

Это пары из собственных векторов и присоединенных к ним: $Bg^{(1)}_i = \mathbf{0}$, $Bg^{(2)}_i = g^{(1)}_i$. В матрице b каждой паре из группы 2 отвечает жорданова клетка размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итого имеем $(k_2 - k_3)$ клеток размера 2×2.

Группа 3: рассматриваем тройки

$$g^{(1)}_{k_4+1}, g^{(2)}_{k_4+1}, g^{(3)}_{k_4+1}; \dots ; g^{(1)}_{k_3}, g^{(2)}_{k_3}, g^{(3)}_{k_3}.$$

Это тройки из собственных векторов, присоединенных к ним и присоединенных к присоединенным: $Bg^{(1)}_i = \mathbf{0}$, $Bg^{(2)}_i = g^{(1)}_i$, $Bg^{(3)}_i = g^{(2)}_i$. В матрице b каждой тройке из группы 3 отвечает жорданова клетка размера 3×3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итого имеем $(k_3 - k_4)$ клеток размера 3×3.

И так далее. Последняя группа с номером m, в нее входят наборы из m векторов:

$$g^{(1)}_1, g^{(2)}_1, \dots, g^{(m)}_1; \dots ; g^{(1)}_{k_m}, g^{(2)}_{k_m}, \dots, g^{(m)}_{k_m}.$$

При этом $Bg_i^{(1)} = \mathbf{0}$, $Bg_i^{(2)} = g_i^{(1)}, \dots,$ $Bg_i^{(m)} = g_i^{(m-1)}$. Каждому набору из m-й группы отвечает жорданова клетка порядка m:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M^m.$$

Всего k_m клеток размера $m \times m$.

Итак, матрица b имеет жорданову форму и состоит из $(k_1 - k_2)$ клеток размера 1×1, $(k_2 - k_3)$ клеток размера 2×2, $(k_3 - k_4)$ клеток размера 3×3, и т. д., $(k_{m-1} - k_m)$ клеток размера $(m-1) \times (m-1)$, k_m клеток размера $m \times m$. Напомним, что числа k_j определяются размерностями ядер:

$$k_1 = \dim \operatorname{Ker} B, \quad k_2 = \dim \operatorname{Ker} B^2 - \dim \operatorname{Ker} B, \ \dots,$$
$$k_m = \dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1}.$$

Тем самым, количество жордановых клеток различного размера в матрице b определяется инвариантными величинами (размерностями ядер степеней оператора B).

Поясним, каким способом можно установить единственность жордановой матрицы b (с точностью до перестановки клеток). Для этого надо предположить, что в каком-то базисе изображающая матрица $b \in M^n$ оператора B имеют жорданову форму. Поскольку оператор B имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, то b состоит из одного ящика, в котором имеются несколько жордановых клеток разного порядка. Рассматривая степени $b, b^2, \dots, b^{m-1}, b^m = \mathbf{0}$, можно показать, что количество клеток различного порядка определяется именно так, как было описано выше (в терминах размерностей ядер операторов $B, B^2, \dots, B^m$). Из этого вытекает единственность. Мы не будем описывать эту часть доказательства детально.

Это завершает *доказательство теоремы* 4.1.

В завершение вернемся к общему случаю (теорема 1.6). Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in \Lambda(E)$ — произвольный оператор. Для построения жорданова базиса оператора A сначала надо определить его различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и их алгебраические кратности $\sigma_1, \dots, \sigma_p$. Заранее можно сказать, что жорданова матрица будет состоять из p ящиков порядков $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, отвечающих $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Применяем теорему разложения по корневым подпространствам

$$E = E(\lambda_1) \dot{+} E(\lambda_2) \dot{+} \cdots \dot{+} E(\lambda_p).$$

В каждом подпространстве $E(\lambda_j)$ строится свой жорданов базис для оператора $A_j = A|_{E(\lambda_j)}$. Объединение этих базисов дает жорданов базис в E для оператора A. Для построения жорданова базиса в $E(\lambda_j)$ применяется теорема 4.1 к нильпотентному оператору $B_j = A_j - \lambda_j I$. Изображающая матрица для оператора A_j отличается от изображающей матрицы для оператора B_j только тем, что на диагонали стоит λ_j вместо нуля. Из доказательства теоремы 4.1 ясно, что устройство j-го ящика в жордановой матрице определяется инвариантными величинами — размерностями ядер степеней оператора B_j.