Дистанционное обучение. Лекция 2. 23 марта 2020 года

§ 3. Собственные элементы и собственные подпространства линейных операторов

3.1. **Собственные элементы. Геометрическая кратность собственных значений.**

Предложение 3.1. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, причем $n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и μ — собственное значение оператора A. В случае $K = \mathbb{R}$ дополнительно предположим, что $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда существует элемент $f \in E$, $f \neq \mathbf{0}$, такой, что $Af = \mu f$.*

Доказательство. Число μ является корнем характеристического многочлена, а потому

$$d_A(\mu) = \det(A - \mu I) = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rank}(A - \mu I) < n$. В силу соотношения

$$\operatorname{rank}(A - \mu I) + \dim \operatorname{Ker}(A - \mu I) = \dim E = n,$$

получаем $\dim \operatorname{Ker}(A - \mu I) > 0$. Это означает, что $\operatorname{Ker}(A - \mu I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда найдется элемент $\mathbf{0} \neq f \in \operatorname{Ker}(A - \mu I)$. Имеем $(A - \mu I)f = \mathbf{0}$, то есть, $Af = \mu f$. $\square$

Определение 3.2. *В условиях предложения* 3.1 *элемент $f \neq \mathbf{0}$ такой, что $Af = \mu f$, называется собственным элементом (или собственным вектором) оператора A, отвечающим собственному значению μ.*

Замечание 3.3. 1°. *Если E — вещественное пространство, а собственное значение $\mu \notin \mathbb{R}$, то никакого собственного вектора, отвечающего μ, нет. Причина в том, что умножение на комплексное число $\mu \notin \mathbb{R}$ в пространстве E не имеет смысла.*
2°. *Если f — собственный вектор оператора A, отвечающий μ, то любой ненулевой вектор вида cf (где $c \in K$) тоже является собственным вектором, отвечающим μ.*

Определение 3.4. *В условиях предложения* 3.1 *собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению μ, называется подпространство $F_\mu := \operatorname{Ker}(A - \mu I)$.*

Собственное подпространство F_μ состоит из всех собственных векторов, отвечающих μ, и из нулевого вектора.

Определение 3.5. *В условиях предложения* 3.1 *геометрической кратностью* τ_μ *собственного значения* μ *называется размерность собственного подпространства:*

$$\tau_\mu := \dim F_\mu.$$

Геометрическая кратность показывает, сколько линейно независимых собственных векторов отвечает данному собственному значению.

Пример

- Пусть $E = \mathbb{R}^2$ и пусть $A_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — оператор поворота на угол $\varphi \in [0, \pi]$. Рассмотрим стандартный базис

$$\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изображающей матрицей оператора A_φ в базисе $\mathbf{e}$ служит матрица поворота

$$a_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристический многочлен

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi.$$

Найдем собственные значения λ_1, λ_2 — корни многочлена $d(\lambda)$:

$$\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}.$$

Если $0 < \varphi < \pi$, то $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, а потому оператор A_φ не имеет никаких собственных векторов. Это ясно и из геометрического смысла: если бы нашелся ненулевой вектор f такой, что $A_\varphi f = \mu f$, то вектор $A_\varphi f$ был бы коллинеарен f (в терминах аналитической геометрии). Но таких векторов не существует, поскольку оператор A_φ поворачивает векторы на угол φ.

Если $\varphi = 0$, то $A_0 = I$ — тождественный оператор, он имеет кратное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, соответствующее собственное подпространство совпадает с $\mathbb{R}^2$.

Если $\varphi = \pi$, то $A_\pi = -I$, он имеет кратное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, соответствующее собственное подпространство совпадает с $\mathbb{R}^2$.

- **Упражнение.** Пусть $E = \mathbb{C}^2$ и $B_\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — оператор умножения на матрицу a_φ, где $0 < \varphi < \pi$. Собственные значения оператора B_φ — это собственные значения матрицы

a_φ. Они уже найдены: $\lambda_1 = e^{i\varphi},\ \lambda_2 = e^{-i\varphi}$. Найдите собственные векторы.

Теорема 3.6. *Пусть E — n-мерное пространство над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, причем $n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и μ — собственное значение оператора A. В случае $K = \mathbb{R}$ предполагаем, что $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда геометрическая кратность τ_μ собственного значения μ не превосходит его алгебраической кратности σ_μ:*

$$\tau_\mu \leqslant \sigma_\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство $F_\mu = \operatorname{Ker}(A - \mu I)$. Геометрическую кратность собственного значения μ обозначим для краткости $\tau := \tau_\mu = \dim F_\mu$, а алгебраическую кратность обозначим $\sigma := \sigma_\mu$.

Выберем какой-либо базис $f_1, \ldots, f_\tau$ в F_μ. Дополним линейно независимый набор $f_1, \ldots, f_\tau$ до базиса в пространстве E:

$$f_1, \ldots, f_\tau; z_{\tau+1}, \ldots, z_n. \tag{3.1}$$

Пусть $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в этом базисе. Векторы f_j — собственные, а потому $Af_j = \mu f_j$, $j = 1, \ldots, \tau$. Запишем разложение векторов Az_k в базисе (3.1):

$$Az_k = \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_k^j f_j + \sum_{l=\tau+1}^{n} \alpha_k^l z_l, \quad k = \tau+1, \ldots, n.$$

Тогда изображающая матрица a имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ 0 & \mu & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu & \alpha_{\tau+1}^\tau & \ldots & \alpha_n^\tau \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^{\tau+1} & \ldots & \alpha_n^{\tau+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

Обозначим через $b \in M^{n-\tau}$ правый нижний блок этой матрицы. Вычислим характеристический многочлен:

$$d_a(\lambda) = \begin{vmatrix} \mu-\lambda & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ 0 & \mu-\lambda & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu-\lambda & \alpha_{\tau+1}^\tau & \ldots & \alpha_n^\tau \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^{\tau+1}-\lambda & \ldots & \alpha_n^{\tau+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\tau+1}^n & \ldots & \alpha_n^n-\lambda \end{vmatrix}.$$

Получаем
$$d_a(\lambda) = (\mu - \lambda)^\tau d_b(\lambda).$$
Следовательно, число μ является корнем характеристического многочлена кратности σ не меньшей, чем τ. Тем самым, доказано, что $\tau \leqslant \sigma$.

Поясним, что $\sigma = \tau$, если μ не является корнем многочлена $d_b(\lambda)$, и $\sigma > \tau$, если μ является корнем многочлена $d_b(\lambda)$. □

В силу предложения 3.1 в условиях теоремы выполнено $\tau_\mu \geqslant 1$.С другой стороны, очевидно, что $\sigma_\mu \leqslant n$. Мы получаем следствие.

Следствие 3.7. 1°. *В условиях теоремы* 3.6 *выполнены неравенства*
$$1 \leqslant \tau_\mu \leqslant \sigma_\mu \leqslant n.$$
2°. *Если μ — простое собственное значение, то $\tau_\mu = \sigma_\mu = 1$.*

Примеры

- Пусть $A = \mathbf{0}_{E\to E}$ — нулевой оператор в n-мерном пространстве E. Его изображающая матрица в любом базисе — это нулевая матрица, характеристический многочлен равен
$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n.$$
Собственное значение одно: $\mu = 0$, его алгебраическая кратность максимальна: $\sigma = n$. Любой ненулевой вектор $f \in E$ является собственным, так как $Af = 0 \cdot f$. Очевидно, собственное подпространство совпадает с E, а геометрическая кратность равна $\tau = n$. В этом примере $\tau = \sigma = n$.
- Пусть $A = I : E \to E$ — тождественный оператор в n-мерном пространстве E. Его изображающая матрица в любом базисе — это единичная матрица, характеристический многочлен равен
$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^n.$$
Собственное значение одно: $\mu = 1$, его алгебраическая кратность максимальна: $\sigma = n$. Любой ненулевой вектор $f \in E$ является собственным, так как $Af = 1 \cdot f$. Очевидно, собственное подпространство совпадает с E, а геометрическая кратность равна $\tau = n$. В этом примере $\tau = \sigma = n$.

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$ (это n-мерное пространство над полем $\mathbb{R}$). Пусть $D : E \to E$ — оператор дифференцирования. Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$, где

  $$e_1(t) = 1,\ e_2(t) = t,\ e_3(t) = \frac{t^2}{2},\ \dots,\ e_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

  Изображающая матрица оператора D в этом базисе имеет вид

  $$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Характеристический многочлен равен

  $$d(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n.$$

  Собственное значение одно: $\mu = 0$, его алгебраическая кратность максимальна: $\sigma = n$.

  Собственный элемент — это ненулевой многочлен $P \in \Omega_{n-1}$ такой, что $DP = \mathbf{0}$, то есть, $P'(t) = 0$ тождественно по t. Следовательно, $P(t) = \mathrm{Const}$. Таким образом, собственное подпространство F состоит из констант, то есть, $F = \Omega_0$, а геометрическая кратность равна единице $\tau = 1$.

  Если $n > 1$ в этом примере, то геометрическая кратность строго меньше алгебраической: $1 = \tau < \sigma = n$.

3.2. **Прямая сумма собственных подпространств.** Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, причем $n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. В комплексном случае рассмотрим все различные собственные значения оператора A, а в вещественном случае рассмотрим все различные *вещественные* собственные значения оператора A. Обозначим набор таких собственных значений

$$\mu_1, \dots, \mu_p.$$

(В вещественном случае этот набор может быть пустым; см. пример про оператор поворота в $\mathbb{R}^2$.)

Пусть $F_1, \dots, F_p$ — соответствующие собственные подпространства, т.е., $F_k = \operatorname{Ker}(A - \mu_k I)$.

Теорема 3.8. *При сделанных предположениях линейная сумма $F_A := F_1 + \dots + F_p$ является прямой суммой*:

$$F_A = F_1 \dotplus F_2 \dotplus \dots \dotplus F_p.$$

Доказательство. Требуется проверить, что для любого $x \in F_A$ представление в виде $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_j \in F_j$ $(j = 1, \dots, p)$ единственно.

Предположим, что

$$x = x_1 + \dots + x_p, \quad x = \widetilde{x}_1 + \dots + \widetilde{x}_p, \quad x_j, \widetilde{x}_j \in F_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Требуется доказать, что $x_j = \widetilde{x}_j$, $j = 1, \dots, p$.

Обозначим $f_j := x_j - \widetilde{x}_j$, $j = 1, \dots, p$. Имеем

$$f_1 + \dots + f_p = \mathbf{0}, \quad f_j \in F_j, \quad j = 1, \dots, p. \tag{3.2}$$

Требуется доказать, что $f_j = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, p$.

Применим к равенству (3.2) оператор $(A - \mu_1 I)$ и учтем, что $Af_j = \mu_j f_j$, $j = 1, \dots, p$. Получаем

$$(\mu_2 - \mu_1)f_2 + (\mu_3 - \mu_1)f_3 + \dots + (\mu_p - \mu_1)f_p = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Далее, применяя к равенству (3.3) оператор $(A - \mu_2 I)$, приходим к

$$(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)f_3 + \dots + (\mu_p - \mu_1)(\mu_p - \mu_2)f_p = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Каждый раз число слагаемых уменьшается на единицу. Будем продолжать эту процедуру. Предпоследнее равенство имеет вид

$$(\mu_{p-1} - \mu_1)\cdots(\mu_{p-1} - \mu_{p-2})f_{p-1} + (\mu_p - \mu_1)\cdots(\mu_p - \mu_{p-2})f_p = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Наконец, последнее равенство содержит всего одно слагаемое:

$$(\mu_p - \mu_1)\cdots(\mu_p - \mu_{p-1})f_p = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Множитель $(\mu_p - \mu_1)\cdots(\mu_p - \mu_{p-1})$ отличен от нуля, поскольку все числа $\mu_1, \dots, \mu_p$ различны. Поэтому из (3.6) вытекает, что $f_p = \mathbf{0}$. Подставляя $f_p = \mathbf{0}$ в (3.5), получаем $f_{p-1} = \mathbf{0}$. И так далее. В итоге мы убеждаемся, что $f_1 = \dots = f_p = \mathbf{0}$. □

3.3. **Критерий существования собственного базиса. Диагонализуемость линейных операторов.**

Теорема 3.9. 1°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. В E существует базис из собственных элементов оператора A тогда и только тогда, когда для всех различных собственных значений* *оператора A совпадают геометрические и алгебраические кратности.*

2°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. В E существует базис из собственных элементов оператора A тогда и только тогда, когда все различные собственные значения оператора A вещественны и для них совпадают геометрические и алгебраические кратности.*

Доказательство. 1°. В условиях первого пункта теоремы, пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные собственные значения оператора A. Пусть σ_j и τ_j — алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения μ_j. Отметим, что $\sigma_1 + \cdots + \sigma_p = n$.

Рассмотрим собственные подпространства $F_j = \operatorname{Ker}(A - \mu_j I)$, $\tau_j = \dim F_j$. В силу теоремы 3.8 линейная сумма $F_A := F_1 + \cdots + F_p$ — это прямая сумма:

$$F_A = F_1 \dotplus \cdots \dotplus F_p, \tag{3.7}$$

а тогда

$$\dim F_A = \tau_1 + \cdots + \tau_p.$$

Отметим, что подпространство (3.7) состоит из всевозможных собственных элементов оператора A (и из нулевого вектора $\mathbf{0}$). Поэтому существование в E базиса из собственных элементов (кратко — собственного базиса) оператора A равносильно тому, что $F_A = E$. Последнее равенство равносильно тому, что $\dim F_A = \dim E = n$. Таким образом, существование собственного базиса равносильно соотношению

$$\tau_1 + \cdots + \tau_p = n. \tag{3.8}$$

В силу теоремы 3.6 выполнены неравенства $\tau_j \leqslant \sigma_j$, $j = 1, \ldots, p$, а потому

$$\tau_1 + \cdots + \tau_p \leqslant \sigma_1 + \cdots + \sigma_p = n. \tag{3.9}$$

Достаточность. Очевидно, если $\tau_j = \sigma_j$ при всех $j = 1, \ldots, p$, то неравенство (3.9) превратится в равенство, а тогда выполнено (3.8), что равносильно существованию собственного базиса.

Необходимость. Пусть существует собственный базис. Тогда выполнено (3.8). Это возможно только в том случае, когда $\tau_j = \sigma_j$ при всех $j = 1, \ldots, p$. Действительно, если хотя бы для одного j выполнено $\tau_j < \sigma_j$, то неравенство (3.9) будет строгим: $\tau_1 + \cdots + \tau_p < \sigma_1 + \cdots + \sigma_p = n$.

2°. В условиях второго пункта надо рассмотреть все различные *вещественные* собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_p$ оператора A

и провести аналогичные рассуждения. При этом, если у оператора A существует хотя бы одно невещественное собственное значение, то окажется, что $\sigma_1 + \dots + \sigma_p < n$. Тогда заведомо $\dim F_A = \tau_1 + \dots + \tau_p < n$ и собственного базиса не существует. Поэтому условие, чтобы все собственные значения были вещественными, необходимо. Если оно выполнено, то по-прежнему $\sigma_1 + \dots + \sigma_p = n$ и надо просто повторить рассуждения из первого пункта. □

Определение 3.10. *Оператор $A \in \Lambda(E)$ называется диагонализуемым, если в E существует базис, в котором изображающая матрица оператора A диагональна.*

Предложение 3.11. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. В E существует собственный базис оператора $A \in \Lambda(E)$ тогда и только тогда, когда оператор A диагонализуем.*

Доказательство. Утверждение практически очевидно.

Необходимость. Пусть в E существует базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов оператора A. Тогда $Af_j = \lambda_j f_j$, где λ_j — соответствующие собственные значения. Очевидно, изображающая матрица a оператора A в базисе $\mathbf{f}$ имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Матрица a диагональна, а значит, оператор A диагонализуем.

Достаточность. Пусть оператор диагонализуем, то есть, существует базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$, в котором изображающая матрица a оператора A диагональна, то есть, a имеет вид (3.10). Поскольку столбцы изображающей матрицы состоят из координат векторов Af_k, $k = 1, \dots, n$, получаем

$$Af_k = \lambda_k f_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, числа λ_k, стоящие на диагонали матрицы a, — это собственные значения, а базисные векторы f_k — это собственные векторы оператора A. Значит, базис $\mathbf{f}$ является собственным базисом оператора A. □

Из теоремы 3.9 и предложения 3.11 вытекает следствие.

Следствие 3.12. 1°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Оператор $A \in$*

$\Lambda(E)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда для всех различных собственных значений оператора A совпадают геометрические и алгебраические кратности.
2°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Оператор $A \in \Lambda(E)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда все различные собственные значения оператора A вещественны и для них совпадают геометрические и алгебраические кратности.*

Вспомним определение диагонализуемой матрицы.

Определение 3.13. *Матрица a называется диагонализуемой, если она подобна диагональной матрице $\widetilde{a}$, то есть, существует неособая матрица b такая, что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.*

Теперь мы обсудим, как связаны свойства диагонализуемости оператора и его изображающей матрицы.

Предложение 3.14. 1°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Оператор $A \in \Lambda(E)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда его изображающая матрица a (в каком-либо базисе) диагонализуема.*
2°. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем $n = \dim E \geqslant 1$. Оператор $A \in \Lambda(E)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда его изображающая матрица a (в каком-либо базисе) диагонализуема в классе вещественных матриц.*

Доказательство. 1°. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в E. Пусть a — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$.

Необходимость. Пусть оператор A диагонализуем, то есть, в E существует базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$, в котором изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A диагональна:

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Обозначим через b матрицу перехода от исходного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Вспомним закон преобразования изображающих матриц: $\widetilde{a} = b^{-1}ab$. Мы убедились, что матрица a диагонализуема.

Достаточность. Пусть матрица a диагонализуема, то есть, существует неособая матрица b такая, что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$. Тогда матрица $\widetilde{a}$ является изображающей матрицей оператора A в базисе $\mathbf{f}$, который связан с базисом $\mathbf{e}$ матрицей перехода b (см. ковариантный закон преобразования). Таким образом, оператор A диагонализуем.

Утверждение 2° устанавливается аналогично. $\square$

Как следствие, мы установим критерий диагонализуемости матриц. Следующее утверждение формулируется в матричных (а не операторных) терминах.

Предложение 3.15. 1°. *Матрица $a \in M^n$ с комплексными элементами диагонализуема тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и векторы $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n \in \mathbb{C}^n$ такие, что $a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$ при всех $j = 1, \dots, n$. При этом выполнено $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где диагональная матрица $\widetilde{a}$ имеет вид* (3.11)*, а матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$.*
2°. *Матрица $a \in M^n$ с вещественными элементами диагонализуема в классе вещественных матриц тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и векторы $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$ при всех $j = 1, \dots, n$. При этом выполнено $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где диагональная матрица $\widetilde{a}$ имеет вид* (3.11)*, а матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$.*

Доказательство. 1°. Рассмотрим оператор $A = \widehat{a} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на матрицу a. Пусть $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$. Изображающей матрицей оператора A в базисе $\mathbf{e}$ является сама матрица a.

В силу предложения 3.14 матрица a диагонализуема тогда и только тогда, когда оператор A диагонализуем. Как следует из предложения 3.11, диагонализуемость оператора A равносильна существованию собственного базиса $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ в $\mathbb{C}^n$. При этом $a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$, $j = 1, \dots, n$, где λ_j — соответствующие собственные значения. Очевидно, матрица перехода b от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ состоит из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A в собственном базисе $\mathbf{f}$ диагональна (имеет вид (3.11)). Выполнено $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.
2°. Второе утверждение доказывается аналогично с помощью рассмотрения оператора $A = \widehat{a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $\square$