Дистанционное обучение. Лекция 3. 26 марта 2020 года

## § 4. Функции от операторов

Материал этого параграфа излагается обзорно (многие факты сообщаются без доказательства или доказательство поручается читателю). Мы обсудим различные подходы к определению функций от линейных операторов в конечномерном линейном пространстве $E$ над полем $K$, где $K=\mathbb{C}$ или $K=\mathbb{R}$.

### 4.1. **Степени $A^m$, $m\in\mathbb{Z}_+$.**

**Определение 4.1.** *Пусть $A\in\Lambda(E)$ и пусть $m\in\mathbb{Z}_+$. Определение оператора $A^m$ индуктивно:*

$$A^0:=I,\ A^1:=A,\ A^2:=A\cdot A,\ A^3:=A^2\cdot A,\ \dots,\ A^m:=A^{m-1}\cdot A,\ \dots$$

Проверьте самостоятельно, что $A^m$ и $A^k$ коммутируют, причем справедливо равенство

$$A^mA^k=A^kA^m=A^{m+k},\quad m,k\in\mathbb{Z}_+.$$

(Для проверки надо использовать ассоциативность умножения операторов.)

Если $a\in M^n$ — изображающая матрица оператора $A$ в некотором базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора $A^m$ в том же базисе служит $a^m$. Это свойство следует из того, что композиции (произведению) операторов отвечает произведение их изображающих матриц.

### 4.2. **Многочлены от $A$.**

**Определение 4.2.** *Пусть $P(t)$ — многочлен вида*

$$P(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\dots+p_mt^m,$$

*где $p_j\in\mathbb{C}$ в случае $K=\mathbb{C}$ и $p_j\in\mathbb{R}$ в случае $K=\mathbb{R}$. Пусть $A\in\Lambda(E)$. Оператор $P(A)$ определен формулой*

$$P(A)=p_0I+p_1A+p_2A^2+\dots+p_mA^m.$$

Проверьте, что два многочлена $P(A)$ и $Q(A)$ коммутируют и справедливо равенство

$$P(A)Q(A)=Q(A)P(A)=(PQ)(A),$$

где многочлен $PQ$ — это произведение $(PQ)(t)=P(t)Q(t)$.

Если $a\in M^n$ — изображающая матрица оператора $A$ в некотором базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора $P(A)$ в том же базисе служит $P(a)$.

**Предложение 4.3.** *Пусть* $A \in \Lambda(E)$ *и пусть* $d_A(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \dots + \delta_n t^n$ *— характеристический многочлен оператора* $A$*. Тогда выполнено тождество Кэли*

$$d_A(A) = \delta_0 I + \delta_1 A + \dots + \delta_n A^n = \mathbf{0}_{E \to E}.$$

*Доказательство.* Пусть $a$ — изображающая матрица оператора $A$ в некотором базисе $\mathbf{e}$. Тогда характеристический многочлен оператора $A$ совпадает с характеристическим многочленом матрицы $a$: $d_A(t) = d_a(t)$.

Для любого многочлена $P$ изображающей матрицей оператора $P(A)$ является матрица $P(a)$, поэтому для оператора $d_A(A) = d_a(A)$ изображающей матрицей является $d_a(a)$. В силу тождества Кэли матрица $d_a(a)$ равна нулевой матрице. Следовательно, $d_A(A)$ равен нулевому оператору. □

4.3. **Степени $A^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$.**

**Определение 4.4.** *Пусть* $A \in \Lambda(E)$*, причем* $\det A \neq 0$*. Тогда существует обратный оператор* $A^{-1}$*. Пусть* $m \in \mathbb{N}$*. По определению,*

$$A^{-m} := (A^{-1})^m.$$

Проверьте, что в случае $\det A \neq 0$ любые целые степени $A^k$ и $A^j$ коммутируют:

$$A^k A^j = A^j A^k = A^{k+j}, \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

4.4. **Дробно-рациональные функции от операторов.** В этом пункте ограничимся (более простым) случаем пространства $E$ над полем $\mathbb{C}$. Пусть задана дробно-рациональная функция

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)},$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — некоторые многочлены, $\deg P = m$, $\deg Q = k \geqslant 1$.

Выделим целую часть рациональной дроби, то есть, представим дробь $R(t)$ в виде

$$R(t) = S(t) + \frac{P_1(t)}{Q(t)},$$

где $S(t)$, $P_1(t)$ — некоторые многочлены, причем $S(t) = 0$, если $m < k$, и $\deg S = m - k$, если $m \geqslant k$, а $\deg P_1 \leqslant k - 1$.

Пусть $t_1, \dots, t_q$ — все различные корни многочлена $Q(t)$, а $j_1, \dots, j_q$— их кратности ($j_1 + \dots + j_q = k$). Тогда правильную дробь

$\frac{P_1(t)}{Q(t)}$ можно разложить в сумму простых дробей и мы получаем представление

$$R(t) = S(t) + \frac{\alpha_1^{(1)}}{t-t_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(t-t_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{j_1}^{(1)}}{(t-t_1)^{j_1}} + \dots + \\ + \frac{\alpha_1^{(q)}}{t-t_q} + \frac{\alpha_2^{(q)}}{(t-t_q)^2} + \dots + \frac{\alpha_{j_q}^{(q)}}{(t-t_q)^{j_q}}. \tag{4.1}$$

Пусть $A \in \Lambda(E)$. Предположим, что числа $t_1, \dots, t_q$ не являются собственными значениями оператора $A$. Тогда корректно определены операторы $(A - t_s I)^{-m}$, $s = 1, \dots, q$, при $m \in \mathbb{N}$.

**Определение 4.5.** *Пусть дробно-рациональная функция $R(t)$ допускает представление (4.1). Пусть $A \in \Lambda(E)$. Предположим, что числа $t_1, \dots, t_q$ не являются собственными значениями оператора $A$. По определению,*

$$R(A) = S(A) + \\ + \alpha_1^{(1)}(A - t_1 I)^{-1} + \alpha_2^{(1)}(A - t_1 I)^{-2} + \dots + \alpha_{j_1}^{(1)}(A - t_1 I)^{-j_1} + \\ + \dots + \alpha_1^{(q)}(A - t_q I)^{-1} + \alpha_2^{(q)}(A - t_q I)^{-2} + \dots + \alpha_{j_q}^{(q)}(A - t_q I)^{-j_q}.$$

Если $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора $A$ в некотором базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора $R(A)$ в том же базисе служит $R(a)$.

**Замечание 4.6.** *Пусть $E$ — пространство над полем $\mathbb{R}$, и многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ имеют вещественные коэффициенты. Тогда данное выше определение годится только в том случае, когда все корни $t_1, \dots, t_q$ многочлена $Q(t)$ вещественны. Если это не так, то надо модифицировать определение, используя разложение дроби $R(t)$ с участием простых дробей третьего и четвертого типов, имеющих вид $\frac{\alpha+\beta t}{(t^2+\gamma t+\delta)^m}$ (где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, а дробь в знаменателе имеет отрицательный дискриминант).*

4.5. **Аналитические функции от операторов.** Пусть функция $f(t)$ допускает разложение в сходящийся степенной ряд (ряд Тейлора)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k, \qquad f_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{4.2}$$

**Определение 4.7.** *Пусть $f(t)$ раскладывается в ряд* (4.2). *Пусть $A \in \Lambda(E)$. По определению,*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k.$$

Это определение требует объяснения, как понимается сходимость ряда из операторов. Один из способов объяснения дается через переход к изображающим матрицам. Пусть $a$ — изображающая матрица оператора $A$ в каком-либо базисе $\mathbf{e}$. Эквивалентное определение: оператор $f(A)$ — это оператор с изображающей матрицей

$$f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k a^k$$

в базисе $\mathbf{e}$. Сходимость матричного ряда понимается поэлементно: должны сходиться числовые ряды

$$[f(a)]_{lj} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k [a^k]_{lj}, \quad l.j = 1, \ldots, n.$$

**Пример**. Экспонента от оператора задана рядом

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

4.6. **Функции от диагонализуемых операторов.** Пусть оператор $A \in \Lambda(E)$ диагонализуем. Тогда существует базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ из собственных векторов оператора $A$. При этом $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $\lambda_j$ — соответствующие собственные значения оператора $A$. Изображающая матрица $a$ оператора $A$ в базисе $\mathbf{f}$ диагональна:

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Phi(t)$ — некоторая функция (в вещественном случае это функция от вещественного аргумента с вещественными значениями, в комплексном случае это функция от комплексного аргумента с комплексными значениями). Предполагается, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

принадлежат области определения функции $\Phi(t)$. Вспомним определение функции от диагональной матрицы:

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi(\lambda_n) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

**Определение 4.8.** *При сделанных предположениях оператор $\Phi(A)$ — это оператор в $E$, изображающая матрица которого в базисе $\mathbf{f}$ есть $\Phi(a)$.*

Собственными значениями оператора $\Phi(A)$ являются числа $\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_n)$, а собственные векторы прежние:

$$\Phi(A) f_j = \Phi(\lambda_j) f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Замечание 4.9.** 1) *Аналитическую функцию $f(A)$ можно определить для любого оператора $A$, но аналитичность $f$ — очень сильное ограничение. Зато для диагонализуемых операторов можно определить любую функцию $\Phi(A)$.*

2) *Разные определения согласованы между собой. Если $A$ диагонализуем, то определение рациональной функции $R(A)$ через разложение* (4.1) *и через диагонализацию дают один и тот же оператор $R(A)$. Аналогично, определение аналитической функции $f(A)$ через степенной ряд и через диагонализацию дают один и тот же оператор $f(A)$.*

4.7. **Применение к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка.** Функции от матриц применяются, например, в теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{12} x_2(t) + \dots + \alpha_{1n} x_n(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = \alpha_{n1} x_1(t) + \alpha_{n2} x_2(t) + \dots + \alpha_{nn} x_n(t). \end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — функции от $t \in \mathbb{R}$ с комплексными значениями, а $\alpha_{lj} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты. Ищем решение системы, удовлетворяющее начальному условию

$$x_1(0) = x_{01},\ x_2(0) = x_{02},\ \dots,\ x_n(0) = x_{0n}. \tag{4.5}$$

Здесь начальные данные $x_{0j} \in \mathbb{C}$ заданы. В теории дифференциальных уравнений задачу (4.4), (4.5) называют *задачей Коши.*

Удобно записать эту систему в матричном виде

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = a\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \tag{4.6}$$

где $\vec{x}(t)$ — столбец неизвестных функций

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$a$ — матрица коэффициентов:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

а $\vec{x}_0$ — столбец начальных данных:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

В курсе дифференциальных уравнений устанавливается теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Мы убедимся, что это решение можно записать с помощью матричной экспоненты.

**Предложение 4.10.** *Решение задачи* (4.6) *дается формулой*

$$\vec{x}(t) = e^{ta}\vec{x}_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

*где $e^{ta}$ — экспонента от матрицы $ta$.*

*Доказательство.* Запишем матричную экспоненту в виде суммы ряда

$$e^{ta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k a^k.$$

Продифференцируем по $t$:

$$\frac{de^{ta}}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{dt^k}{dt} a^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} a^k.$$

(В теории степенных функциональных рядов устанавливается законность перемены порядка дифференцирования и суммирования.) Преобразуем правую часть:

$$\frac{de^{ta}}{dt} = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} a^{k-1} = a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m a^m = a e^{ta}.$$

Применяя получившееся равенство к вектору $\vec{x}_0$, получаем

$$\frac{d(e^{ta}\vec{x}_0)}{dt} = a(e^{ta}\vec{x}_0).$$

Поскольку $e^{0\cdot a}$ — это единичная матрица, то $(e^{ta}\vec{x}_0)|_{t=0} = \vec{x}_0$. Тем самым, вектор-функция $\vec{x}(t) = e^{ta}\vec{x}_0$ является решением задачи Коши (4.6). $\square$

Рассмотрим случай, когда матрица $a$ диагонализуема. В силу предложения 3.15 найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и базис $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ в $\mathbb{C}^n$, такие что $a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$, $j = 1, \dots, n$. При этом выполнено $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где матрица $\widetilde{a}$ диагональна и имеет вид

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

а матрица $b$ составлена из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$.

Выполним подстановку (замену неизвестной вектор-функции)

$$\vec{x}(t) = b\vec{y}(t) \;\Leftrightarrow\; \vec{y}(t) = b^{-1}\vec{x}(t).$$

Домножая уравнение $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = a\vec{x}(t)$ на матрицу $b^{-1}$, получаем уравнение для $\vec{y}(t)$:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = (b^{-1}ab)\vec{y}(t) \;\Leftrightarrow\; \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \widetilde{a}\vec{y}(t).$$

Домножая начальное условие $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ на матрицу $b^{-1}$ и вводя обозначение $\vec{y}_0 := b^{-1}\vec{x}_0$, получаем

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0 \equiv \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}.$$

Мы приходим к задаче Коши

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \widetilde{a}\vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0.$$

За счет того, что матрица $\widetilde{a}$ диагональна, эта задача расщепляется на отдельные задачи для каждой скалярной функции $y_j(t)$:

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \lambda_j y_j(t), \quad y_j(0) = y_{0j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Скалярные задачи Коши легко решаются:

$$y_j(t) = e^{\lambda_j t} y_{0j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Замечание 4.11.** *Если матрица a не диагонализуема, то такого расщепления не происходит. В общем случае можно вычислять матричную экспоненту* $e^{ta}$*, используя приведение матрицы a к жордановой форме. (Жорданову форму мы будем изучать в конце курса алгебры.) Тогда у задачи Коши существуют неэкспоненциальные решения.*