Дистанционное обучение. Лекция 4. 2 апреля 2020 года

Глава 3. Линейные и билинейные формы

§ 1. Линейные формы

1.1. **Определение. Примеры.** Пусть E —n-мерное линейное пространство над полем K, где $K=\mathbb{C}$ или $K=\mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Линейный оператор $f : E \to K^1$ называется линейным функционалом или линейной формой в пространстве E.*

Иначе говоря, линейная форма — это линейная числовая функция от векторного аргумента (из E). Значение формы $f \in \Lambda(E, K^1)$ на векторе $x \in E$ принято обозначать

$$f(x) = \langle f, x\rangle \in K.$$

Определение 1.2. *Двойственным пространством E' к пространству E называется пространство линейных форм:*

$$E' := \Lambda(E, K^1).$$

Поскольку $\dim \Lambda(E, K^1) = \dim E \cdot \dim K^1$, а пространство K^1 одномерно, то

$$\dim E' = \dim E.$$

Отметим *свойство билинейности* скобок $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

1) Для любой формы $f \in E'$, любых векторов $x, y \in E$ и любых чисел $\alpha, \beta \in K$ выполнено

$$\langle f, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle.$$

Это свойство выражает линейность оператора $f \in \Lambda(E, K^1)$.

2) Для любых форм $f_1, f_2 \in E'$, любых чисел $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ и любого вектора $x \in E$ выполнено

$$\langle \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, x\rangle = \gamma_1\langle f_1, x\rangle + \gamma_2\langle f_2, x\rangle.$$

Это свойство следует из определения действий над операторами (сложение операторов и умножение операторов на число).

Примеры

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, а форма $f \in E'$ сопоставляет вектору $\vec{x}$ его первую координату:

$$\langle f, \vec{x}\rangle = \xi^1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, а форма $f \in E'$ сопоставляет вектору $\vec{x}$ сумму его координат:
$$\langle f, \vec{x}\rangle = \xi^1 + \dots + \xi^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$
- Пусть $E = \Omega_{n-1}$, а форма $f \in E'$ сопоставляет многочлену $P(t)$ его значение в точке $t = 1$:
$$\langle f, P\rangle = P(1), \quad P \in \Omega_{n-1}.$$
- Пусть $E = \Omega_{n-1}$, а форма $f \in E'$ сопоставляет многочлену $P(t)$ значение интеграла от $P(t)$ по промежутку $[0,1]$:
$$\langle f, P\rangle = \int\limits_0^1 P(t)\,dt, \quad P \in \Omega_{n-1}.$$
- Пусть $E = M^n$ — пространство матриц $n\times n$ с комплексными элементами (т.е., $K = \mathbb{C}$), а форма $f \in E'$ сопоставляет матрице $a \in M^n$ ее след:
$$\langle f, a\rangle = \operatorname{Tr} a, \quad a \in M^n.$$

1.2. **Двойственный базис в E'.** Пусть в пространстве E задан базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Зададим линейные формы $g^1, \dots, g^n \in E'$ по правилу
$$\langle g^k, e_j\rangle = \delta^k_j, \quad j, k = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$
где δ^k_j — символ Кронекера. Тогда значение формы g^k на векторе $x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$ равно k-ой координате этого вектора:
$$\langle g^k, x\rangle = \xi^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Предложение 1.3. *При сделанных предположениях набор $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ образует базис в пространстве E'.*

Доказательство. Проверим сначала, что набор $\{g^1, \dots, g^n\}$ линейно независим. Пусть некоторая линейная комбинация форм $g^1, \dots, g^n$ равна нулевой форме:
$$\sum_{k=1}^n \beta_k g^k = \mathbf{0}_{E'}. \tag{1.2}$$
Требуется доказать, что тогда все коэффициенты β_k равны нулю. Применим форму (1.2) к вектору e_j:
$$\sum_{k=1}^n \beta_k \langle g^k, e_j\rangle = \langle \mathbf{0}_{E'}, e_j\rangle = 0.$$

Учитывая (1.1), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_j^k = \beta_j = 0.$$

Это верно при всех $j = 1, \ldots, n$.

Поскольку $\dim E' = \dim E = n$, любой линейно независимый набор из n линейных форм образует базис в E'. Следовательно, набор $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ образует базис в E'. □

Определение 1.4. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис в пространстве* E. *Пусть линейные формы* $g^1, \ldots g^n \in E'$ *заданы соотношениями* (1.1). *Базис* $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ *в пространстве* E' *называется базисом, двойственным к базису* $\mathbf{e}$.

Предложение 1.5. *Пусть* $\mathbf{e}$ *и* $\mathbf{g}$ *— двойственные базисы в* E *и в* E'.
1) *Если вектор* $x \in E$ *разложен по базису* $\mathbf{e}$: $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$, *то*

$$\langle g^k, x \rangle = \xi^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если форма $f \in E$ *разложена по базису* $\mathbf{g}$: $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k$, *то*

$$\langle f, e_j \rangle = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

2) *Если* $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k$ *и* $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$, *то*

$$\langle f, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \xi^k.$$

Доказательство. Первое равенство — это определение форм g^k.

Второе равенство получается с учетом линейности скобок по первому аргументу и (1.1):

$$\langle f, e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \langle g^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \delta_j^k = \varphi_j.$$

Третье равенство получается из первого и линейности скобок по первому аргументу:

$$\langle f, x \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \langle g^k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \xi^k.$$

□

1.3. **Второе двойственное пространство.** Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K и пусть E' — двойственное пространство. Рассмотрим пространство E'', двойственное к E':

$$E'' := (E')',$$

и назовем его *вторым двойственным* пространством к E.

Покажем, что E'' можно естественным образом отождествить с исходным пространством E.

По заданному $x \in E$ построим элемент $X \in E''$ по правилу

$$X(f) := \langle f, x \rangle, \quad f \in E'. \tag{1.3}$$

Функционал X над E' является линейным в силу линейности скобок по первому аргументу:

$$\begin{aligned} X(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2) &= \langle \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, x \rangle = \gamma_1 \langle f_1, x \rangle + \gamma_2 \langle f_2, x \rangle \\ &= \gamma_1 X(f_1) + \gamma_2 X(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in E', \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in K. \end{aligned}$$

Предложение 1.6. *Отображение $J : E \to E''$, переводящее элемент $x \in E$ в функционал $X \in E''$ по правилу* (1.3)*, является изоморфизмом.*

Доказательство. Проверим, что отображение J — линейное. Пусть $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$. Пусть $X = Jx$, $Y = Jy$. Требуется проверить, что выполнено равенство

$$J(\alpha x + \beta y) = \alpha X + \beta Y.$$

Для любого $f \in E'$ имеем

$$\begin{aligned} (J(\alpha x + \beta y))(f) &= \langle f, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle f, y \rangle \\ &= \alpha X(f) + \beta Y(f) = (\alpha X + \beta Y)(f). \end{aligned}$$

В первом переходе использовано определение отображения J, во втором — линейность скобок по второму аргументу, в третьем — снова определение J. Наконец, последнее равенство выполнено за счет определения линейных операций над операторами (в данном случае — над формами из пространства $E'' = \Lambda(E', K^1)$).

Проверим теперь, что линейное отображение $J : E \to E''$ является взаимно-однозначным (т.е., изоморфизмом). Нам известно, что

$$\dim E'' = \dim E' = \dim E.$$

Тогда достаточно убедиться в том, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_E\}$. (См. тему “типы линейных отображений”.)

Пусть $x \in \operatorname{Ker} J$, то есть $Jx = X = \mathbf{0}_{E''}$. Это означает, что

$$X(f) = \langle f, x \rangle = 0, \quad \forall f \in E'. \tag{1.4}$$

Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве E. Пусть $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ — базис в E', двойственный к $\mathbf{e}$. Разложим x по выбранному базису: $x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$. Формы $g^1, \dots, g^n$ определены по правилу $\langle g^k, x\rangle = \xi^k$. Подставим теперь $f = g^k$ в (1.4). Получаем $\xi^k = \langle g^k, x\rangle = 0$. Это верно при всех $k = 1, \dots, n$. Следовательно, $x = \mathbf{0}_E$.

Мы убедились, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_E\}$. Следовательно, $J : E \to E''$ — изоморфизм. $\square$

Отображение $J : E \to E''$ называют *естественным изоморфизмом*, а сами пространства E'' и E отождествляют (подразумевая отождествление с помощью отображения J).

1.4. **Пример.** Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$. Фиксируем n различных точек $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим многочлены $e_1(t), \dots, e_n(t)$ степени $(n-1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$e_j(t_k) = \delta_j^k, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Такие многочлены легко выписать явно:

$$e_j(t) = \frac{\Pi_{k\neq j}(t - t_k)}{\Pi_{k\neq j}(t_j - t_k)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Проверим, что многочлены $e_1, \dots, e_n$ образуют базис в Ω_{n-1}. Поскольку $\dim E = n$, то достаточно проверить, что набор $e_1, \dots, e_n$ линейно независим.

Предположим, что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $t = t_k$. Имеем:

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_j^k = \alpha_k.$$

Это верно при всех $k = 1, \dots, n$. Тем самым, мы убедились в линейной независимости набора $e_1, \dots, e_n$.

Двойственный базис к базису $e_1, \dots, e_n$ образуют формы $g^1, \dots, g^n \in E'$, определенные соотношениями $\langle g^k, P\rangle := P(t_k)$, $k = 1, \dots, n$. Действительно, выполнено

$$\langle g^k, e_j\rangle := e_j(t_k) = \delta_j^k, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Замечание 1.7. *Многочлен вида*

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} P(t_k) e_k(t)$$

называют интерполяционным многочленом Лагранжа. Его применяют, чтобы интерполировать неизвестную функцию $f(t)$ многочленом $P(t)$, имеющим те же значения в заданном наборе точек, т.е., $P(t_k) = f(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Например, это может быть полезным при измерениях какой-либо физической величины $f(t)$, зависящей от времени t (по результатам n измерений в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ мы приближаем функцию $f(t)$ многочленом $P(t)$).

1.5. **Преобразования двойственных базисов.** Пусть в пространстве E заданы базисы $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$. Разложим векторы $\widetilde{e}_k$ в исходном базисе:

$$\widetilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

и составим матрицу перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \ldots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ — базис в E', двойственный к базису $\mathbf{e}$, и пусть $\widetilde{\mathbf{g}} = \{\widetilde{g}^1, \ldots, \widetilde{g}^n\}$ — базис в E', двойственный к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Найдем формулы перехода от базиса $\mathbf{g}$ к базису $\widetilde{\mathbf{g}}$.

Вычислим величину $\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle$ двумя разными способами. Используя (1.5), получаем

$$\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle = \langle g^m, \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \langle g^m, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \delta_j^m = \beta_k^m. \tag{1.6}$$

Разложим форму g^m в базисе $\widetilde{\mathbf{g}}$:

$$g^m = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \widetilde{g}^j, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Используя это разложение, вычислим $\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle$ другим способом:

$$\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \langle \widetilde{g}^j, \widetilde{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \delta_k^j = \gamma_k^m. \tag{1.7}$$

Сопоставляя (1.6) и (1.7), получаем $\gamma_k^m = \beta_k^m$. Следовательно,

$$g^m = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^m \widetilde{g}^j, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Чтобы записать закон (1.8) в матричной форме, введем символические столбцы

$$\vec{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{\mathbf{g}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{g}^1 \\ \widetilde{g}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{g}^n \end{pmatrix}.$$

Тогда (1.8) можно записать в виде

$$\vec{\mathbf{g}} = b\vec{\widetilde{\mathbf{g}}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\widetilde{\mathbf{g}}} = b^{-1}\vec{\mathbf{g}}. \tag{1.9}$$

Вывод: базисы в E' преобразуются по контравариантному закону.

Сравнивая закон преобразования базисов в E ($\vec{\widetilde{\mathbf{e}}} = b^t\vec{\mathbf{e}}$) и закон (1.9) преобразования базисов в E', приходим к выводу, что матрица перехода c от $\mathbf{g}$ к $\widetilde{\mathbf{g}}$ связана с матрицей b соотношением $c^t = b^{-1}$, то есть, $c = (b^t)^{-1}$.

Отметим, что относительно матрицы c закон (1.9) является ковариантным (как и должно быть в любом пространстве, в частности, в E'). Но если “хозяйкой” законов преобразования назначить матрицу b, то закон (1.9) — контравариантный.

Теперь получим закон преобразования координат в E'. Пусть элемент $f \in E'$ разложен в базисах $\mathbf{g}$ и $\widetilde{\mathbf{g}}$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, \quad f = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \widetilde{g}^j.$$

Составим векторы из координат f:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{f}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1 \\ \widetilde{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}_n \end{pmatrix}.$$

Закон преобразования координат в E' нам известен: как и во всяком конечномерном пространстве, это контравариантный закон относительно матрицы c: $\vec{\widetilde{f}} = c^{-1}\vec{f}$. Поскольку $c^{-1} = b^t$, получаем ковариантный закон (относительно матрицы b):

$$\vec{\widetilde{f}} = b^t\vec{f}. \tag{1.10}$$

Вывод: базисы в E и двойственные координаты в E' преобразуются по ковариантному закону; координаты в E и двойственные базисы в E' преобразуются по контравариантному закону (относительно матрицы перехода b).

1.6. **Преобразование изображающих матриц.** Пусть в пространстве E заданы базисы $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$. Пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Пусть $\mathbf{g}$ — базис в E', двойственный к базису $\mathbf{e}$, и пусть $\widetilde{\mathbf{g}}$ — базис в E', двойственный к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Матрицей перехода от базиса $\mathbf{g}$ к базису $\widetilde{\mathbf{g}}$ является матрица $c = (b^t)^{-1}$.

Пусть $A \in \Lambda(E)$ и a — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Пусть $\widetilde{a}$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. Вспомним закон преобразования:

$$\widetilde{a} = b^{-1}ab.$$

1) Рассмотрим оператор $R \in \Lambda(E')$. Пусть r — изображающая матрица оператора R в базисе $\mathbf{g}$, а $\widetilde{r}$ — изображающая матрица оператора R в базисе $\widetilde{\mathbf{g}}$. Тогда

$$\widetilde{r} = c^{-1}rc \;\Leftrightarrow\; \widetilde{r} = b^t r (b^t)^{-1}.$$

2) Рассмотрим теперь оператор $P \in \Lambda(E, E')$. Пусть p — изображающая матрица оператора P в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$, а $\widetilde{p}$ — изображающая матрица оператора P в паре базисов $\widetilde{\mathbf{e}}, \widetilde{\mathbf{g}}$. Тогда равенство $Px = f$ равносильно равенству $p\vec{x} = \vec{f}$. Воспользуемся законами $\vec{x} = b\vec{\widetilde{x}}$, $\vec{\widetilde{f}} = b^t \vec{f}$. Получаем:

$$\vec{\widetilde{f}} = b^t \vec{f} = b^t p \vec{x} = b^t p b \vec{\widetilde{x}}.$$

Это означает, что

$$\widetilde{p} = b^t p b. \tag{1.11}$$

3) Наконец, рассмотрим оператор $S \in \Lambda(E', E)$. Пусть s — изображающая матрица оператора S в паре базисов $\mathbf{g}, \mathbf{e}$, а $\widetilde{s}$ — изображающая матрица оператора S в паре базисов $\widetilde{\mathbf{g}}, \widetilde{\mathbf{e}}$.

Тогда равенство $Sf = x$ равносильно равенству $s\vec{f} = \vec{x}$. Воспользуемся законами $\vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x}$, $\vec{f} = (b^t)^{-1}\vec{\widetilde{f}}$. Получаем:

$$\vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x} = b^{-1}s\vec{f} = b^{-1}s(b^t)^{-1}\vec{\widetilde{f}}.$$

Это означает, что

$$\widetilde{s} = b^{-1}s(b^{-1})^t. \tag{1.12}$$