Дистанционное обучение. Лекция 5. 6 апреля 2020 года

§ 2. Билинейные формы

2.1. **Определение. Примеры.**

Определение 2.1. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$. Билинейной формой в пространстве E называется отображение $Q : E \times E \to K$, линейное по каждому аргументу в отдельности:*

$$Q(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha Q(x_1, y) + \beta Q(x_2, y), \quad x_1, x_2, y \in E,\ \alpha, \beta \in K;$$
$$Q(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda Q(x, y_1) + \mu Q(x, y_2), \quad x, y_1, y_2 \in E,\ \lambda, \mu \in K.$$

Таким образом, $Q(\cdot, y)$ — это линейная форма при фиксированном $y \in E$; $Q(x, \cdot)$ — это линейная форма при фиксированном $x \in E$.

Примеры.

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$ и форма Q задана равенством
$$Q(\vec{x}, \vec{y}) = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \cdots + \xi^n\eta^n,$$
где
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$
- Пусть $E = \mathbb{R}^2$ и форма Q задана равенством
$$Q(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix} = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1,$$
где
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}.$$
- Пусть $E = M^n$ — пространство матриц с вещественными элементами и форма Q задана равенством
$$Q(a, b) = \operatorname{Tr} ab, \quad a, b \in M^n.$$
- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n - 1$. Пусть форма Q задана равенством
$$Q(P_1, P_2) = \int\limits_0^1 (P_1(t)P_2'(t) - P_1'(t)P_2(t))\, dt, \quad P_1, P_2 \in \Omega_{n-1}.$$

2.2. **Пространство билинейных форм.** Обозначим через $\mathcal{F}(E)$ множество всех билинейных форм в E. Введем линейные операции на множестве $\mathcal{F}(E)$.

Определение 2.2. *Суммой билинейных форм $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$ называется отображение $Q = Q_1 + Q_2 : E \times E \to K$, определенное по правилу*

$$Q(x,y) := Q_1(x,y) + Q_2(x,y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте самостоятельно, что так определенное отображение Q является снова билинейной формой. Проверьте также, что действие сложения на $\mathcal{F}(E)$ ассоциативно и коммутативно. Роль нейтрального элемента в $\mathcal{F}(E)$ играет *нулевая билинейная форма* $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$, определенная по правилу

$$\mathbf{0}(x,y) = 0, \quad x, y \in E.$$

Для каждой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует противоположная форма $-Q$ такая, что $Q + (-Q) = \mathbf{0}$. Эта форма определена соотношением

$$(-Q)(x,y) = -Q(x,y), \quad x, y \in E.$$

Таким образом, $\mathcal{F}(E)$ образует *абелеву группу по сложению.*

Определение 2.3. *Произведением билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ на число $\alpha \in K$ называется отображение $\alpha Q : E \times E \to K$, определенное по правилу*

$$(\alpha Q)(x,y) := \alpha Q(x,y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте самостоятельно, что так определенное отображение αQ является снова билинейной формой. Проверьте также, что выполнены свойства:

1) $(\alpha + \beta)Q = \alpha Q + \beta Q$ для любых $Q \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha, \beta \in K$;
2) $\alpha(Q_1 + Q_2) = \alpha Q_1 + \alpha Q_2$ для любых $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha \in K$;
3) $\alpha(\beta Q) = (\alpha\beta)Q$ для любых $Q \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha, \beta \in K$;
4) $1 \cdot Q = Q$ для любого $Q \in \mathcal{F}(E)$.

Мы установили следующую теорему.

Теорема 2.4. *Множество $\mathcal{F}(E)$ образует линейное пространство.*

Предложение 2.5. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{F}(E)$ — пространство билинейных форм в E. Тогда* $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$.

Доказательство. Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E. Рассмотрим билинейные формы Q^{kl}, $k, l = 1, \dots, n$, определенные соотношениями

$$Q^{kl}(x, y) = \xi^k \eta^l, \quad x, y \in E,$$

где

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l. \tag{2.1}$$

Тогда выполнено

$$Q^{kl}(e_j, e_m) = \delta_j^k \delta_m^l, \quad k, l, j, m = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Проверим, что набор $\{Q^{kl}\}, k, l = 1, \dots, n$, образует базис в $\mathcal{F}(E)$. Поскольку набор состоит из n^2 форм, отсюда следует, что $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$.

Сначала проверим, что данный набор линейно независим. Предположим, что

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl} = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}.$$

Тогда

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl}(x, y) = 0, \quad x, y \in E.$$

Подставим $x = e_j$ и $y = e_m$:

$$0 = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl}(e_j, e_m) = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \delta_j^k \delta_m^l = \gamma_{jm}.$$

Таким образом, $\gamma_{jm} = 0$ при всех $j, m = 1, \dots, n$. Следовательно, набор $\{Q^{kl}\}$ линейно независим.

Покажем теперь, что любую билинейную форму Q можно разложить по набору $\{Q^{kl}\}$. Пусть $x, y \in E$ имеют вид (2.1). Имеем:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= Q\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \sum_{l=1} \eta^l e_l\Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi^k \eta^l Q(e_k, e_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} \xi^k \eta^l = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}(x, y) = \Big(\sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}\Big)(x, y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $q_{kl} := Q(e_k, e_l)$. Ввиду произвольности векторов x, y из (2.3) следует разложение

$$Q = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}.$$

$\square$

2.3. **Оператор билинейной формы.** Пусть $\Gamma \in \Lambda(E, E')$. Построим по оператору Γ билинейную форму

$$Q_\Gamma(x, y) = \langle \Gamma x, y \rangle, \quad x, y \in E. \tag{2.4}$$

Предложение 2.6. *Отображение $J : \Lambda(E, E') \to \mathcal{F}(E)$, определенное по правилу $J\Gamma = Q_\Gamma$, где Q_Γ определено в* (2.4), *является изоморфизмом.*

Доказательство. Сначала проверим, что отображение J является линейным. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Lambda(E, E')$ и $\alpha, \beta \in K$. Имеем:

$$Q_{\alpha\Gamma_1+\beta\Gamma_2}(x, y) = \langle(\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2)x, y\rangle = \alpha\langle\Gamma_1 x, y\rangle + \beta\langle\Gamma_2 x, y\rangle$$
$$= \alpha Q_{\Gamma_1}(x, y) + \beta Q_{\Gamma_2}(x, y) = (\alpha Q_{\Gamma_1} + \beta Q_{\Gamma_2})(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Это и означает, что

$$Q_{\alpha\Gamma_1+\beta\Gamma_2} = \alpha Q_{\Gamma_1} + \beta Q_{\Gamma_2} \;\Leftrightarrow\; J(\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2) = \alpha J\Gamma_1 + \beta J\Gamma_2.$$

Проверим теперь, что линейный оператор J является изоморфизмом. Поскольку нам известно, что $\dim \Lambda(E, E') = \dim \mathcal{F}(E) = n^2$, то достаточно убедиться, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_{E\to E'}\}$. (См. тему “типы линейных отображений”).

Пусть $\Gamma \in \operatorname{Ker} J$, то есть, $J\Gamma = Q_\Gamma = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$. Тогда

$$Q_\Gamma(x, y) = \langle\Gamma x, y\rangle = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

Фиксируем сначала x. Тот факт, что $\langle\Gamma x, y\rangle = 0$ для любого $y \in E$, означает, что $\Gamma x = \mathbf{0}_{E'}$. Поскольку это верно для произвольного $x \in E$, делаем вывод, что $\Gamma = \mathbf{0}_{E\to E'}$. $\square$

Таким образом, оператор J устанавливает взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами из E в E' и билинейными формами в E.

Следствие 2.7. *Для любой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует единственный линейный оператор $\Gamma = \Gamma_Q : E \to E'$ такой, что $Q(x, y) = \langle\Gamma x, y\rangle$, $x, y \in E$.*

Определение 2.8. *В условиях следствия* 2.7 *оператор Γ_Q называется оператором билинейной формы Q.*

2.4. **Изображающая матрица билинейной формы.** Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве E. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Обозначим

$$q_{kl} := Q(e_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Тогда

$$Q(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl}\xi^k\eta^l, \quad \text{где } x = \sum_{k=1}^{n}\xi^k e_k, \ y = \sum_{l=1}^{n}\eta^l e_l. \tag{2.6}$$

Определение 2.9. *Изображающей матрицей билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в базисе* $\mathbf{e}$ *называется матрица*

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы q_{kl} определены в (2.5).

Обратите внимание на *особенность матрицы* q: первый номер элемента q_{kl} — это номер столбца, а второй — номер строки.

Предложение 2.10. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *— базис в E и* $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ *— двойственный базис в E'. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ и q — изображающая матрица формы Q в базисе* $\mathbf{e}$. *Пусть $\Gamma = \Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ — оператор формы Q. Пусть γ — изображающая матрица оператора Γ в паре базисов* $\mathbf{e}, \mathbf{g}$:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

Тогда матрицы q и γ совпадают:

$$q = \gamma.$$

Доказательство. В соответствии с определением изображающей матрицы оператора, элементы γ_{kl} матрицы γ — это координаты форм $\Gamma e_k \in E'$ в базисе $\mathbf{g}$:

$$\Gamma e_k = \sum_{l=1}^{n}\gamma_{kl}g^l, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$q_{km} = Q(e_k, e_m) = \langle \Gamma e_k, e_m \rangle = \langle \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} g^l, e_m \rangle$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} \langle g^l, e_m \rangle = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} \delta^l_m = \gamma_{km},$$

при $k, m = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\gamma = q$. □

Замечание 2.11. *Предложение* 2.10 *дает конструктивный способ восстановить форму* Q_Γ *по заданному оператору* Γ. *По известному оператору* Γ *надо найти его изображающую матрицу* γ *в паре базисов* $\mathbf{e}, \mathbf{g}$ *и затем построить форму* Q, *имеющую изображающую матрицу* $q = \gamma$ *в базисе* $\mathbf{e}$.

2.5. **Преобразование изображающей матрицы билинейной формы.** Пусть $\mathbf{e}$ и $\widetilde{\mathbf{e}}$ — два базиса в пространстве E и пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Пусть $\mathbf{g}$ — базис в E', двойственный к $\mathbf{e}$, а $\widetilde{\mathbf{g}}$ — базис в E', двойственный к $\widetilde{\mathbf{e}}$.

Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ и $\Gamma = \Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ — оператор билинейной формы Q. Пусть γ — изображающая матрица оператора Γ в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$ и $\widetilde{\gamma}$ — изображающая матрица оператора Γ в паре базисов $\widetilde{\mathbf{e}}, \widetilde{\mathbf{g}}$. Закон преобразования изображающих матриц операторов из E в E' нам известен (см. (**??**)):

$$\widetilde{\gamma} = b^t \gamma b. \tag{2.7}$$

Пусть q — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$, а $\widetilde{q}$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. В силу предложения 2.10 выполнены равенства $q = \gamma$ и $\widetilde{q} = \widetilde{\gamma}$. Поэтому из (2.7) вытекает закон преобразования

$$\widetilde{q} = b^t q b. \tag{2.8}$$

Зададим *отношение эквивалентности* на классе матриц M^n (с комплексными элементами): будем говорить, что матрица $\widetilde{q}$ эквивалентна матрице q, если найдется неособая матрица $b \in M^n$ такая, что выполнено (2.8).

Нетрудно убедиться, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности:

1) $q \sim q$ (выполнено $q = b^t q b$, где b — единичная матрица);

2) если $\widetilde{q} \sim q$, то $q \sim \widetilde{q}$ (из $\widetilde{q} = b^t q b$ следует, что $q = (b^{-1})^t \widetilde{q} b^{-1}$);

3) если $\widetilde{q} \sim q$ и $\widehat{q} \sim \widetilde{q}$, то $\widehat{q} \sim q$ (из $\widetilde{q} = b^t q b$ и $\widehat{q} = \widehat{b}^t \widetilde{q} \widehat{b}$ следует, что $\widehat{q} = (b\widehat{b})^t q (b\widehat{b})$).

Таким образом, если E — комплексное пространство, то изображающие матрицы формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в различных базисах эквивалентны друг другу (в смысле введенного отношения эквивалентности).

Можно задать аналогичное отношение эквивалентности на классе матриц с вещественными элементами (тогда все матрицы q, $\widetilde{q}$, b должны иметь вещественные элементы). Если E — вещественное пространство, то изображающие матрицы формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в различных базисах эквивалентны друг другу.

2.6. **Ядро и ранг билинейной формы.**

Определение 2.12. *Ядром билинейной формы* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *называется множество* $\operatorname{Ker} Q := \{x \in E : Q(x,y) = 0, \forall y \in E\}$.

Предложение 2.13. *Пусть* $Q \in \mathcal{F}(E)$. *Пусть* $\Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ — *оператор формы* Q. *Тогда*

$$\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \Gamma_Q.$$

Доказательство. По определению оператора Γ_Q выполнено $Q(x,y) = \langle \Gamma_Q x, y\rangle$, $x, y \in E$. Справедлива следующая цепочка эквивалентных соотношений:

$$\begin{aligned} &x \in \operatorname{Ker} Q \;\Leftrightarrow\; Q(x,y) = 0, \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow \langle \Gamma_Q x, y\rangle = 0, \forall y \in E \;\Leftrightarrow\; \Gamma_Q x = \mathbf{0}_{E'} \;\Leftrightarrow\; x \in \operatorname{Ker} \Gamma_Q. \end{aligned}$$

□

Определение 2.14. *Рангом билинейной формы* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *называется ранг оператора* Γ_Q:

$$\operatorname{rank} Q := \operatorname{rank} \Gamma_Q.$$

Поскольку ранг оператора Γ_Q совпадает с рангом его изображающей матрицы γ в паре двойственных базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$, а матрица γ совпадает с изображающей матрицей q формы Q в базисе $\mathbf{e}$, то *ранг формы* Q *совпадает с рангом ее изображающей матрицы* q:

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} q.$$

Учитывая, что ранг оператора Γ_Q (т.е., размерность образа этого оператора) определен инвариантно и не зависит от выбора базиса, делаем вывод: если $\widetilde{q} = b^t q b$, где $\det b \neq 0$, то $\operatorname{rank} \widetilde{q} = \operatorname{rank} q$.

2.7. **Транспонирование билинейной формы.**

Определение 2.15. *Пусть* $Q \in \mathcal{F}(E)$. *Форма* $Q^t \in \mathcal{F}(E)$, *определенная равенством*

$$Q^t(x,y) := Q(y,x), \quad x, y \in E,$$

называется транспонированной к форме Q.

Перечислим свойства операции транспонирования:

1) $(Q^t)^t = Q$ для любой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$;

2) Линейность: для любых форм $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$ и любых чисел $\alpha, \beta \in K$ выполнено

$$(\alpha Q_1 + \beta Q_2)^t = \alpha Q_1^t + \beta Q_2^t.$$

Предложение 2.16. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Пусть q — изображающая матрица формы Q в некотором базисе $\mathbf{e}$. Тогда изображающей матрицей формы Q^t в том же базисе $\mathbf{e}$ является матрица q^t.*

Доказательство. Обозначим изображающую матрицу формы Q^t в базисе $\mathbf{e}$ через p. В соответствии с определением изображающей матрицы формы (см. пункт 2.4) и с определением транспонированной формы имеем:

$$p_{kl} = Q^t(e_k, e_l) = Q(e_l, e_k) = q_{lk}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Это и означает, что $p = q^t$. □

Определение 2.17. *Форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ называется симметричной, если $Q^t = Q$, то есть, $Q(x, y) = Q(y, x)$ при любых $x, y \in E$.*

Определение 2.18. *Форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ называется антисимметричной, если $Q^t = -Q$, то есть, $Q(x, y) = -Q(y, x)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.19. *Любую форму $Q \in \mathcal{F}(E)$ можно однозначно представить в виде $Q = Q_s + Q_a$, где Q_s — симметричная форма, а Q_a — антисимметричная форма.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Докажем существование нужного представления. Положим

$$Q_s = \frac{1}{2}(Q + Q^t), \quad Q_a = \frac{1}{2}(Q - Q^t). \tag{2.9}$$

Очевидно, выполнены равенства $Q_s^t = Q_s$, $Q_a^t = -Q_a$, $Q = Q_s + Q_a$.

Теперь проверим единственность представления. Пусть $Q = Q_s + Q_a$, где $Q_s^t = Q_s$ и $Q_a^t = -Q_a$. Тогда $Q^t = Q_s^t + Q_a^t = Q_s - Q_a$. Итак,

$$Q = Q_s + Q_a, \quad Q^t = Q_s - Q_a.$$

Складывая эти равенства, получаем $Q_s = \frac{1}{2}(Q + Q^t)$. Вычитая второе равенство из первого, находим $Q_a = \frac{1}{2}(Q - Q^t)$. Мы пришли к прежним формулам (2.9). Это доказывает единственность представления. □

Форму Q_s называют *симметричной частью*, а Q_a — *антисимметричной частью* формы Q.

Из предложения 2.16 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.20. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Пусть q — изображающая матрица формы Q в некотором базисе $\mathbf{e}$.*

1°. *Форма Q симметрична тогда и только тогда, когда матрица q симметрична.*

2°. *Форма Q антисимметрична тогда и только тогда, когда матрица q антисимметрична.*

Замечание 2.21. 1°. *Если изображающая матрица q формы Q в базисе $\mathbf{e}$ симметрична, то и изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q в другом базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ тоже симметрична.*

2°. *Если изображающая матрица q формы Q в базисе $\mathbf{e}$ антисимметрична, то и изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q в другом базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ тоже антисимметрична.*

Эти утверждения следуют из закона преобразования $\widetilde{q} = b^t q b$.

2.8. **Квадратичная форма.**

Определение 2.22. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Квадратичной формой, отвечающей билинейной форме Q, называется отображение $E \to K$, сопоставляющее вектору $x \in E$ число $Q(x,x) \in K$.*

Предложение 2.23. *Для любой антисимметричной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ отвечающая ей квадратичная форма равна нулю: $Q(x,x) = 0$, $x \in E$.*

Доказательство. В силу антисимметричности формы Q имеем $Q(x,y) = -Q(y,x)$ при всех $x, y \in E$. Подставляя $y = x$, получаем $Q(x,x) = -Q(x,x)$, откуда $Q(x,x) = 0$, $x \in E$. $\square$

Предложение 2.24. *По квадратичной форме можно однозначно восстановить симметричную часть билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$. Поскольку симметричная часть Q_s формы Q определена равенством $2Q_s(x,y) = Q(x,y) + Q(y,x)$, то

$$\begin{aligned} Q(x+y, x+y) &= Q(x,x) + Q(y,y) + Q(x,y) + Q(y,x) \\ &= Q(x,x) + Q(y,y) + 2Q_s(x,y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_s(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y, x+y) - Q(x,x) - Q(y,y)\right), \quad x, y \in E. \tag{2.10}$$

Это и есть выражение для $Q_s(x, y)$ через значения квадратичной формы $Q(x, x)$, $Q(y, y)$, $Q(x + y, x + y)$. $\square$