Дистанционное обучение. Лекция 6. 9 апреля 2020 года

§ 3. Приведение симметричной билинейной формы к простейшему виду

3.1. **Задача о диагонализации изображающей матрицы билинейной формы.** Пусть E — линейное n-мерное пространство над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в E.

Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ и $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$. Напомним выражение для $Q(x, y)$:

$$Q(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl}\xi^k\eta^l, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \; y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l. \tag{3.1}$$

При переходе к новому базису $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ изображающая матрица формы Q преобразуется по закону

$$\widetilde{q} = b^t q b, \tag{3.2}$$

где b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$.

Определение 3.1. *Говорят, что изображающую матрицу q билинейной формы Q можно диагонализовать, если существует такой базис $\widetilde{\mathbf{e}}$, в котором изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q диагональна:*

$$\widetilde{q} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{q}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{q}_n \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, изображающую матрицу $q \in M^n$ билинейной формы Q можно диагонализовать, если существует диагональная матрица $\widetilde{q} \in M^n$ и неособая матрица $b \in M^n$ такие, что выполнено (3.2). При этом в случае комплексного пространства (то есть, $K = \mathbb{C}$) матрицы $b, q, \widetilde{q}$ имеют комплексные элементы, а в случае вещественного пространства ($K = \mathbb{R}$) требуется, чтобы $b, q, \widetilde{q}$ имели вещественные элементы.

Предложение 3.2. *Для того, чтобы матрицу билинейной формы Q можно было диагонализовать, необходимо, чтобы форма Q была симметричной.*

Доказательство. Нам дано, что существует такой базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ в E, в котором изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q диагональна. Любая диагональная матрица симметрична, а потому $\widetilde{q}^t = \widetilde{q}$. В силу предложения 2.20 отсюда следует, что $Q^t = Q$. ☐

Ниже мы покажем, что условие симметричности является также и достаточным условием диагонализации изображающей матрицы формы Q (см. теорему 3.4).

Ниже рассматриваем только симметричные билинейные формы. Задача о диагонализации изображающей матрицы билинейной формы Q равносильна *задаче о приведении билинейной формы к простейшему виду* (к “сумме одноименных произведений”):

$$Q(x,y) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{q}_l \widetilde{\xi}^l \widetilde{\eta}^l, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \widetilde{e}_k, \; y = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{\eta}^l \widetilde{e}_l. \tag{3.3}$$

Наконец, поскольку симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме, эта задача равносильна *задаче о приведении квадратичной формы к сумме квадратов*:

$$Q(x,x) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{q}_l (\widetilde{\xi}^l)^2, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \widetilde{e}_k. \tag{3.4}$$

Предложение 3.3. *Предположим, что существует базис* $\mathbf{e}$*, в котором билинейная форма* Q *имеет вид* (3.3)*. Тогда количество ненулевых коэффициентов* $\widetilde{q}_l$ *равно рангу формы* Q*.*

Доказательство. Очевидно, ранг диагональной матрицы $\widetilde{q}$ равен количеству ненулевых диагональных элементов $\widetilde{q}_l$. С другой стороны, ранг формы Q совпадает с рангом ее изображающей матрицы $\widetilde{q}$. □

3.2. **Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Общий случай.** Начнем с рассмотрения примера.

Пример. Пусть E — трехмерное комплексное пространство и $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ — некоторый базис. Пусть задана симметричная билинейная форма Q, изображающая матрица которой в базисе $\mathbf{e}$ есть

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $x = \sum_{k=1}^{3} \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^{3} \eta^l e_l$ выполнено (см. (3.1))

$$Q(x,y) = \xi^1\eta^1 - \frac{1}{2}\xi^1\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta^1 - \frac{1}{2}\xi^2\eta^3 - \frac{1}{2}\xi^3\eta^2.$$

Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$Q(x,x) = (\xi^1)^2 - \xi^1\xi^2 - \xi^2\xi^3.$$

Выделим полные квадраты:

$$Q(x,x) = (\xi^1)^2 - \xi^1\xi^2 + \frac{1}{4}(\xi^2)^2 - \left(\frac{1}{4}(\xi^2)^2 + \xi^2\xi^3 + (\xi^3)^2\right) + (\xi^3)^2$$
$$= \left(\xi^1 - \frac{1}{2}\xi^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\xi^2 + \xi^3\right)^2 + (\xi^3)^2.$$

Обозначим

$$\widetilde{\xi}^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\xi^2, \quad \widetilde{\xi}^2 = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi^3, \quad \widetilde{\xi}^3 = \xi^3.$$

Это координаты вектора x в новом базисе $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$, то есть, $x = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{\xi}^j \widetilde{e}_j$.

Мы показали, что в новых координатах квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x) = (\widetilde{\xi}^1)^2 - (\widetilde{\xi}^2)^2 + (\widetilde{\xi}^3)^2.$$

Используя связь новых координат с исходными:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\xi}^1 \\ \widetilde{\xi}^2 \\ \widetilde{\xi}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

найдем матрицу перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Вспомним контравариантный закон преобразования координат: $\widetilde{\vec{x}} = b^{-1}\vec{x}$. Следовательно,

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращая эту матрицу, находим

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая ковариантный закон преобразования базисов: $\widetilde{\vec{\mathbf{e}}} = b^t\vec{\mathbf{e}}$, получаем

$$\widetilde{e}_1 = e_1, \quad \widetilde{e}_2 = e_1 + 2e_2, \quad \widetilde{e}_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3.$$

В базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ изображающая матрица формы Q диагональна и имеет вид:

$$\widetilde{q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица связана с матрицей q соотношением $\widetilde{q} = b^t q b$.

Теперь мы установим следующий фундаментальный результат.

Теорема 3.4. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$. Для того, чтобы билинейную форму $Q \in \mathcal{F}(E)$ можно было привести к простейшему виду (к сумме одноименных произведений) необходимо и достаточно, чтобы форма Q была симметричной.*

Доказательство. Необходимость уже доказана (см. предложение 3.2).

Достаточность докажем методом *индукции по размерности n*.

База индукции. При $n = 1$ квадратичная форма с самого начала имеет вид “суммы квадратов”:

$$Q(x, x) = q_{11}(\xi^1)^2.$$

Предположение индукции. Предположим, что свойство выполняется в размерности $n - 1$, то есть, в $(n-1)$-мерном пространстве любую симметричную билинейную форму можно привести к простейшему виду. Иначе говоря, любая квадратичная форма вида

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} q_{kl}\xi^k\xi^l,$$

где $q_{kl} = q_{lk}$, может быть приведена к сумме квадратов.

Индукционный переход. Покажем, что тогда свойство верно и в размерности n.

Рассмотрим симметричную билинейную форму Q. В исходном базисе $\mathbf{e}$ соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$Q(x, x) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl}\xi^k\xi^l, \quad q_{kl} = q_{lk}.$$

Покажем, что ее можно привести к сумме квадратов.

Случай 1. Пусть хотя бы один диагональный коэффициент отличен от нуля: $q_{jj} \neq 0$. Без ограничения общности (за счет перенумерации базисных векторов) можно считать, что $j = 1$. То есть, $q_{11} \neq 0$. Имеем:

$$Q(x, x) = q_{11}(\xi^1)^2 + 2q_{12}\xi^1\xi^2 + \cdots + 2q_{1n}\xi^1\xi^n + F(\xi^2, \ldots, \xi^n),$$

где F — квадратичная форма, зависящая от координат $\xi^2, \ldots, \xi^n$. Выделим полный квадрат:

$$Q(x,x) = \frac{1}{q_{11}} \left((q_{11}\xi^1)^2 + 2q_{11}\xi^1 \cdot q_{12}\xi^2 + \cdots + 2q_{11}\xi^1 \cdot q_{1n}\xi^n\right)$$
$$+ F(\xi^2, \ldots, \xi^n) = \frac{1}{q_{11}} \left(q_{11}\xi^1 + q_{12}\xi^2 + \cdots + q_{1n}\xi^n\right)^2 + \widehat{F}(\xi^2, \ldots, \xi^n).$$

Здесь $\widehat{F}$ получается из F вычитанием членов вида $\frac{1}{q_{11}}(q_{1k}\xi^k)^2$ $(k = 2, \ldots, n)$ и $2\frac{1}{q_{11}}q_{1k}\xi^k \cdot q_{1j}\xi^j$ $(k \neq j,\ k, j = 2, \ldots, n)$. Очевидно, $\widehat{F}$ — квадратичная форма, зависящая от координат $\xi^2, \ldots, \xi^n$.

Перейдем к новым координатам:

$$\widehat{\xi}^1 = q_{11}\xi^1 + q_{12}\xi^2 + \cdots + q_{1n}\xi^n, \quad \widehat{\xi}^k = \xi^k,\ k = 2, \ldots, n.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\xi}^1 \\ \widehat{\xi}^2 \\ \vdots \\ \widehat{\xi}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

В соответствии с контравариантным законом преобразования координат $\widehat{\vec{x}} = (\widehat{b})^{-1}\vec{x}$, матрица в правой части — это $(\widehat{b})^{-1}$. Имеем $\det(\widehat{b})^{-1} = q_{11} \neq 0$. Новый базис $\widehat{\mathbf{e}} = \{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n\}$ связан с исходным базисом $\mathbf{e}$ матрицей перехода $\widehat{b}$.

Форму $\widehat{F}(\xi^2, \ldots, \xi^n) = \widehat{F}(\widehat{\xi}^2, \ldots, \widehat{\xi}^n)$ можно интерпретировать как квадратичную форму, отвечающую симметричной билинейной форме $\widehat{F}$ в $(n-1)$-мерном подпространстве $\widehat{E} = \mathcal{L}(\widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_n)$:

$$\widehat{F}(x', x') = \widehat{F}(\widehat{\xi}^2, \ldots, \widehat{\xi}^n), \quad x' = \sum_{j=2}^{n} \widehat{\xi}^j \widehat{e}_j \in \widehat{E}.$$

Итак, мы показали, что в новом базисе $\widehat{\mathbf{e}}$ квадратичная форма имеет вид

$$Q(x,x) = \frac{1}{q_{11}}(\widehat{\xi}^1)^2 + \widehat{F}(x', x'), \quad x = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\xi}^j \widehat{e}_j.$$

По предположению индукции форму $\widehat{F}(x', x')$ можно привести к сумме квадратов, то есть, в подпространстве $\widehat{E}$ найдется такой базис $\{\widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n\}$, в котором

$$\widehat{F}(x', x') = \sum_{l=2}^{n} \widetilde{q}_l (\widetilde{\xi}^l)^2, \quad x' = \sum_{j=2}^{n} \widetilde{\xi}^l \widetilde{e}_l \in \widehat{E}.$$

Окончательно, рассмотрим базис $\{\widehat{e}_1, \widetilde{e}_2, \dots, \widetilde{e}_n\}$ в пространстве E. В этом базисе форма $Q(x,x)$ имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x) = \frac{1}{q_{11}}(\widehat{\xi}^1)^2 + \widetilde{q}_2(\widetilde{\xi}^2)^2 + \dots + \widetilde{q}_n(\widetilde{\xi}^n)^2, \quad x = \widehat{\xi}^1\widehat{e}_1 + \sum_{j=2}^{n}\widetilde{\xi}^j\widetilde{e}_j.$$

Случай 2. Пусть все диагональные коэффициенты равны нулю: $q_{ll} = 0$, $l = 1, \dots, n$, но хотя бы один внедиагональный коэффициент отличен от нуля. Без ограничения общности считаем, что $q_{12} = q_{21} \neq 0$.

Перейдем к новым координатам:

$$\check{\xi}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^1 + \xi^2), \quad \check{\xi}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^2 - \xi^1), \quad \check{\xi}^k = \xi^k,\ k = 3, \dots, n.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \check{\xi}^1 \\ \check{\xi}^2 \\ \vdots \\ \check{\xi}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

В соответствии с контравариантным законом преобразования координат $\vec{\check{x}} = (\check{b})^{-1}\vec{x}$, матрица в правой части — это $(\check{b})^{-1}$. Имеем $\det(\check{b})^{-1} = 1 \neq 0$. Новый базис $\check{\mathbf{e}} = \{\check{e}_1, \dots, \check{e}_n\}$ связан с исходным базисом $\mathbf{e}$ матрицей перехода $\check{b}$.

Воспользуемся тождеством

$$2\xi^1\xi^2 = \frac{1}{2}(\xi^1 + \xi^2)^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi^1)^2 = (\check{\xi}^1)^2 - (\check{\xi}^2)^2.$$

Тогда в новом базисе квадратичная форма приобретает вид

$$Q(x,x) = q_{12}(\check{\xi}^1)^2 - q_{12}(\check{\xi}^2)^2 + \check{Q}(x,x),$$

где квадратичная форма $\check{Q}(x,x)$ не содержит членов с $(\check{\xi}^1)^2$ и $(\check{\xi}^2)^2$. Поскольку $q_{12} \neq 0$, мы свели дело к случаю 1.

Случай 3. Пусть все коэффициенты q_{kl} равны нулю, то есть Q — нулевая форма. Тогда утверждение очевидно — $Q(x,x)$ с самого начала имеет вид суммы квадратов (с нулевыми коэффициентами). $\square$

Замечание 3.5. *Рассмотрим комплексный случай, то есть, E — n-мерное пространство над полем $\mathbb{C}$. В силу предложения* 3.3 *количество ненулевых коэффициентов в* (3.4) *равно $r = \operatorname{rank} Q$. За счет перенумерации векторов нового базиса $\widetilde{\mathbf{e}}$ будем считать, что* *первые r коэффициентов отличны от нуля: $\widetilde{q}_l \neq 0$, $l = 1, \ldots, r$, а остальные равны нулю. Тогда*

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{q}_k (\widetilde{\xi}^k)^2 = \sum_{k=1}^{r} (\xi_\circ^k)^2,$$

где $\xi_\circ^k = \sqrt{\widetilde{q}_k}\widetilde{\xi}^k$, $k = 1, \ldots, r$. Рассмотрим базис $\mathbf{e}_\circ = \{e_{\circ 1}, \ldots, e_{\circ n}\}$, где

$$e_{\circ k} = (\widetilde{q}_k)^{-1/2}\widetilde{e}_k,\ k = 1, \ldots, r; \quad e_{\circ j} = \widetilde{e}_j,\ j = r+1, \ldots, n.$$

В этом базисе изображающая матрица формы Q имеет вид

$$q_\circ^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь на диагонали первые r элементов равны 1, а остальные равны нулю.

Отсюда следует, что любая симметричная матрица $q \in M^n$ с комплексными элементами ранга r эквивалентна матрице $q_\circ^{(r)}$. (Подразумевается отношение эквивалентности, введенное в пункте 2.5.) То есть, найдется неособая матрица $b \in M^n$ такая, что $b^t q b = q_\circ^{(r)}$. Тем самым, все симметричные комплексные матрицы из M^n, имеющие одинаковый ранг, эквивалентны друг другу.

Замечание 3.6. *В вещественном пространстве E для симметричной формы Q ранга r в новом базисе получается представление*

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{q}_k (\widetilde{\xi}^k)^2, \quad \widetilde{q}_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, r.$$

Однако, следующий шаг — переход к координатам $\xi_\circ^k = \sqrt{\widetilde{q}_k}\widetilde{\xi}^k$, вообще говоря, невозможен. Сейчас коэффициенты $\widetilde{q}_k$ — вещественные числа, отличные от нуля. Они могут быть положительными или отрицательными. В случае отрицательного коэффициента $\widetilde{q}_k$ переход к $\xi_\circ^k$ невозможен.