3.3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Вещественный случай. Следующий результат известен как "закон инерции квадратичных форм".

Теорема 3.7. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Пусть симметричная форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ ранга r приведена к сумме квадратов: $Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} q_k(\xi^k)^2$, причем $q_k \neq 0$ при $k = 1,\dots,r$. Тогда количество n_+ положительных коэффициентов q_k и количество n_- отрицательных коэффиентов q_k не зависят от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов.*

Доказательство. Пусть $r = \operatorname{rank} Q$ и $n_0 = n - r$. Предположим, что в базисе $\mathbf{e}$ квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} q_k(\xi^k)^2, \quad x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j, \quad q_k \neq 0,\ k = 1,\dots,r. \tag{3.5}$$

Количество положительных коэффициентов равно n_+, количество отрицательных коэффициентов равно n_-. Очевидно, $n_+ + n_- = r$.

Изменим обозначения и перенумеруем (при необходимости) координаты. Положительные коэффициенты среди набора $q_1,\dots,q_r$ обозначим q_k^+, $k = 1,\dots,n_+$, а отрицательные коэффициенты обозначим q_l^-, $l = 1,\dots,n_-$. Через ξ_+^k, $k = 1,\dots,n_+$, обозначим координаты, при которых коэффициенты в (3.5) положительны, а через ξ_-^l, $l = 1,\dots,n_-$, обозначим координаты, при которых коэффициенты отрицательны. Наконец, координаты, при которых коэффициенты равны нулю, обозначим ξ_0^j, $j = 1,\dots,n_0$. Соответственно изменим и обозначения для базисных векторов:

$$\mathbf{e} = \{e_1^+,\dots,e_{n_+}^+; e_1^-,\dots,e_{n_-}^-; e_1^0,\dots,e_{n_0}^0\}. \tag{3.6}$$

Теперь формулу (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} Q(x,x) = \sum_{k=1}^{n_+} q_k^+(\xi_+^k)^2 + \sum_{l=1}^{n_-} q_l^-(\xi_-^l)^2, \\ x = \sum_{k=1}^{n_+} \xi_+^k e_k^+ + \sum_{l=1}^{n_-} \xi_-^l e_l^- + \sum_{j=1}^{n_0} \xi_0^j e_j^0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Рассмотрим два подпространства

$$E_+ := \mathcal{L}\{e_1^+,\dots,e_{n_+}^+\}, \quad \dim E_+ = n_+,$$
$$F := \mathcal{L}\{e_1^-,\dots,e_{n_-}^-; e_1^0,\dots,e_{n_0}^0\}, \quad \dim F = n_- + n_0.$$

Тогда на подпространстве E_+ квадратичная форма строго положительна:

$$Q(x,x) > 0, \quad \forall x \in E_+,\ x \neq \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

На подпространстве F квадратичная форма неположительна:

$$Q(x,x) \leqslant 0, \quad \forall x \in F.$$

Предположим теперь, что та же форма приведена к простейшему виду каким-то другим способом. Это означает, что в некотором базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{q}_k (\widetilde{\xi}^k)^2, \quad x = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\xi}^j \widetilde{e}_j, \quad \widetilde{q}_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, r. \tag{3.9}$$

Количество положительных коэффициентов равно $\widetilde{n}_+$, количество отрицательных коэффициентов равно $\widetilde{n}_-$. Очевидно, $\widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- = r$.

Требуется доказать, что $\widetilde{n}_+ = n_+$ и $\widetilde{n}_- = n_-$.

Мы изменим обозначения тем же способом, что первый раз. Положительные коэффициенты в (3.9) обозначим $\widetilde{q}_k^+$, $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_+$, отрицательные обозначим $\widetilde{q}_l^-$, $l = 1, \ldots, \widetilde{n}_-$. Соответствующие координаты обозначаем $\widetilde{\xi}_+^k$, $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_+$, и $\widetilde{\xi}_-^l$, $l = 1, \ldots, \widetilde{n}_-$. Координаты, при которых коэффициенты равны нулю, обозначим $\widetilde{\xi}_0^j$, $j = 1, \ldots, n_0$. Соответственно изменим и обозначения для базисных векторов:

$$\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1^+, \ldots, \widetilde{e}_{\widetilde{n}_+}^+; \widetilde{e}_1^-, \ldots, \widetilde{e}_{\widetilde{n}_-}^-; \widetilde{e}_1^0, \ldots, \widetilde{e}_{n_0}^0\}.$$

Теперь формулу (3.9) можно переписать в виде

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{\widetilde{n}_+} \widetilde{q}_k^+ (\widetilde{\xi}_+^k)^2 + \sum_{l=1}^{\widetilde{n}_-} \widetilde{q}_l^- (\widetilde{\xi}_-^l)^2,$$
$$x = \sum_{k=1}^{\widetilde{n}_+} \widetilde{\xi}_+^k \widetilde{e}_k^+ + \sum_{l=1}^{\widetilde{n}_-} \widetilde{\xi}_-^l \widetilde{e}_l^- + \sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{\xi}_0^j \widetilde{e}_j^0.$$

Рассмотрим два подпространства

$$\widetilde{E}_+ := \mathcal{L}\{\widetilde{e}_1^+, \ldots, \widetilde{e}_{\widetilde{n}_+}^+\}, \quad \dim \widetilde{E}_+ = \widetilde{n}_+,$$
$$\widetilde{F} := \mathcal{L}\{\widetilde{e}_1^-, \ldots, \widetilde{e}_{\widetilde{n}_-}^-; \widetilde{e}_1^0, \ldots, \widetilde{e}_{n_0}^0\}, \quad \dim \widetilde{F} = \widetilde{n}_- + n_0.$$

Тогда на подпространстве $\widetilde{E}_+$ квадратичная форма строго положительна:

$$Q(x,x) > 0, \quad \forall x \in \widetilde{E}_+,\ x \neq \mathbf{0}.$$

На подпространстве $\widetilde{F}$ квадратичная форма неположительна:

$$Q(x,x) \leqslant 0, \quad \forall x \in \widetilde{F}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь линейную сумму подпространств E_+ и $\widetilde{F}$. В силу (3.8) и (3.10) пересечение этих подпространств тривиально: $E_+ \cap \widetilde{F} = \{\mathbf{0}\}$, а потому их линейная сумма является прямой суммой. Имеем

$$\dim(E_+ \dotplus \widetilde{F}) = n_+ + \widetilde{n}_- + n_0 \leqslant \dim E = n_+ + n_- + n_0.$$

Следовательно, $\widetilde{n}_- \leqslant n_-$.

Аналогично, пересечение подпространств $\widetilde{E}_+$ и F тривиально, а потому их сумма является прямой суммой. Имеем

$$\dim(\widetilde{E}_+ \dotplus F) = \widetilde{n}_+ + n_- + n_0 \leqslant \dim E = \widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- + n_0.$$

Следовательно, $n_- \leqslant \widetilde{n}_-$.

Таким образом, из доказанных неравенств $\widetilde{n}_- \leqslant n_-$ и $n_- \leqslant \widetilde{n}_-$ следует равенство $\widetilde{n}_- = n_-$. Поскольку $n_+ + n_- = \widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- = r$, получаем $\widetilde{n}_+ = n_+$. □

Определение 3.8. *Пусть в конечномерном вещественном пространстве E симметричная форма Q приведена к простейшему виду. Количество положительных коэффициентов n_+ и количество отрицательных коэффициентов n_- в сумме* (3.5) *называются индексами инерции формы Q.*

Пусть $q \in M^n$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Рассмотрим в n-мерном вещественном пространстве E симметричную форму Q, имеющую изображающую матрицу q в некотором базисе. Индексы инерции формы Q называют *индексами инерции матрицы $q \in M^n$*.

Замечание 3.9. *Пусть квадратичная форма $Q(x,x)$ в базисе* (3.6) *имеет вид суммы квадратов* (3.7). *Тогда*

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{n_+} (\check{\xi}_+^k)^2 - \sum_{l=1}^{n_-} (\check{\xi}_-^l)^2,$$

где $\check{\xi}_+^k = \sqrt{q_k^+}\,\xi^k$, $k = 1,\ldots,n_+$; $\check{\xi}_-^l = \sqrt{|q_l^-|}\,\xi_-^l$, $l = 1,\ldots,n_-$. Рассмотрим базис

$$\check{\mathbf{e}} = \{\check{e}_1^+,\ldots,\check{e}_{n_+}^+;\check{e}_1^-,\ldots,\check{e}_{n_-}^-;e_1^0,\ldots,e_{n_0}^0\},$$

где

$$\check{e}_k^+ = (q_k^+)^{-1/2} e_k^+,\ k = 1,\ldots,n_+; \quad \check{e}_l^- = |q_l^-|^{-1/2} e_l^-,\ l = 1,\ldots,n_-.$$

В этом базисе изображающая матрица формы Q имеет вид

$$\check{q}^{(n_+,n_-)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь на диагонали первые n_+ элементов равны 1, следующие n_- элементов равны -1, а остальные элементы равны нулю.

Отсюда следует, что любая симметричная матрица $q \in M^n$ (с вещественными элементами) с индексами инерции n_+, n_- эквивалентна матрице $\check{q}^{(n_+,n_-)}$. (Подразумевается отношение эквивалентности, введенное в пункте 2.5). То есть, найдется неособая матрица $b \in M^n$ с вещественными элементами такая, что $b^t q b = \check{q}^{(n_+,n_-)}$. Тем самым, все симметричные вещественные матрицы из M^n, имеющие одинаковые индексы инерции, эквивалентны друг другу.

Глава 4. Вещественные евклидовы пространства

§ 1. Геометрия евклидова пространства

1.1. **Основные понятия.**

Определение 1.1. *Множество E называется вещественным евклидовым пространством, если*

1) *E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$* ($\dim E = n$);

2) *выделена симметричная билинейная форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ с индексами инерции $n_+ = n$, $n_- = 0$, называемая скалярным произведением векторов*:

$$(x, y) := Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Свойства скалярного произведения

- Билинейность:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y), \quad x_1, x_2, y \in E, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x, y_1) + \mu(x, y_2), \quad x, y_1, y_2 \in E, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Симметричность:

$$(x, y) = (y, x), \quad x, y \in E.$$

- Положительная определенность:

$$(x, x) > 0, \quad \forall x \neq \mathbf{0}.$$

Первые два свойства следуют из того, что скалярное произведение — это симметричная билинейная форма. Третье свойство следует из предположения об индексах инерции: в некотором базисе $\mathbf{e}$ квадратичная форма $(x, x) = Q(x, x)$ имеет вид

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} q_k (\xi^k)^2, \quad x = \sum_{l=1}^{n} \xi^l e_l,$$

причем все коэффициенты q_k положительны. Если $x \neq \mathbf{0}$, то хотя бы одна координата ξ^l отлична от нуля, а тогда $(x, x) > 0$.

Замечание 1.2. *Обратим внимание, что евклидово пространство по определению конечномерно. В бесконечномерном случае используется другой термин — гильбертово пространство.*

На протяжении этого параграфа *предполагаем, что E — вещественное евклидово пространство*, причем $n = \dim E \geqslant 1$.

Определение 1.3. *Говорят, что элементы $x, y \in E$ ортогональны (и пишут $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.*

Определение 1.4. *Нормой элемента $x \in E$ называется число $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.*

Имеется ввиду арифметическое значение корня, так что $\|x\| \geqslant 0$. Отметим несколько простых свойств:

- Нулевой вектор ортогонален к любому вектору x:

$$(\mathbf{0}, x) = 0, \quad \forall x \in E. \tag{1.1}$$

Это свойство вытекает из линейности скалярного произведения по первому аргументу. Имеем $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$ и $(\mathbf{0}, x) = (0 \cdot \mathbf{0}, x) = 0 \cdot (\mathbf{0}, x) = 0$.

- Справедливо тождество

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2, \quad x, y \in E. \tag{1.2}$$

Действительно, в силу билинейности и симметричности скалярного произведения,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает “теорема Пифагора”:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{если } x \perp y.$$

Предложение 1.5. *Если $x \perp y$ при любом $y \in E$, то $x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Дано: $(x, y) = 0$ при любом $y \in E$. Возьмем $y = x$. Тогда $(x, x) = 0$. В силу свойства положительной определенности отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$. □

Определение 1.6. *Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E называется ортогональным, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть, $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$.*

Определение 1.7. *Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E называется ортонормированным, если*

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Элементы ортонормированного базиса попарно ортогональны и нормированы: $\|e_k\| = 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Предложение 1.8. 1) *В вещественном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

2) *Если $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, то*

$$\xi^j = (x, e_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

3) *Если $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$, то*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \eta^k, \quad \|x\|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2.$$

Доказательство. 1) Симметричную билинейную форму (x, y) с индексами инерции $n_+ = n$, $n_- = 0$ можно привести к сумме одноименных произведений с коэффициентами $q_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$ (см. пункт 3.3). Это означает, что существует такой базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \eta^k, \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \; y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l.$$

Подставляя в эту формулу $x = e_m$, $y = e_p$, автоматически получаем $(e_m, e_p) = \sum_{k=1}^n \delta_m^k \delta_p^k = \delta_{mp}$. Следовательно, базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный.

2) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$. Имеем:

$$(x, e_j) = (\sum_{k=1}^n \xi^k e_k, e_j) = \sum_{k=1}^n \xi^k (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^n \xi^k \delta_{kj} = \xi^j.$$

Мы воспользовались линейностью скалярного произведения по первому аргументу и соотношением $(e_k, e_j) = \delta_{kj}$.

3) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. Имеем:

$$(x, y) = (x, \sum_{l=1}^n \eta^l e_l) = \sum_{l=1}^n \eta^l (x, e_l) = \sum_{l=1}^n \xi^l \eta^l.$$

Мы воспользовались линейностью скалярного произведения по второму аргументу и уже доказанным равенством $(x, e_l) = \xi^l$. $\square$

Примеры вещественных евклидовых пространств

- $E = \mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^n \xi^j \eta^j, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

  Пример ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ — стандартный базис

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E = M^n$ — пространство матриц с вещественными элементами. Скалярное произведение вводится по формуле

$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^t, \quad a, b \in M^n.$$

  Проверьте равенство

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}. \tag{1.3}$$

  Билинейность скалярного произведения проверяется с помощью линейности следа. Проверим линейность по первому аргументу:

$$(\alpha a + \beta c, b) = \operatorname{Tr}(\alpha a + \beta c) b^t = \alpha \operatorname{Tr} ab^t + \beta \operatorname{Tr} cb^t = \alpha(a, b) + \beta(c, b).$$

  Аналогично проверяется линейность по второму аргументу. Проверим симметричность скалярного произведения:

$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^t = \operatorname{Tr}(ab^t)^t = \operatorname{Tr} ba^t = (b, a).$$

Наконец, положительная определенность следует из (1.3):

$$(a,a)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2>0, \quad \text{если } a\neq \mathbf{0}.$$

Проверьте, что “матричные единицы” образуют ортонормированный базис в M^n.

- $E=\Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами. Введем скалярное произведение по формуле

$$(P_1,P_2)=\int\limits_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)\,dt.$$

Убедитесь, что все свойства скалярного произведения выполнены.

Отметим, что стандартный базис $\{1,t,t^2,\dots,t^{n-1}\}$ в Ω_{n-1} не является ортогональным (при $n\geqslant 3$). Ортогональный базис образуют полиномы Лежандра, которые получаются из стандартного базиса применением процесса ортогонализации (см. пункт 4.2 ниже).

Предложение 1.9. *В вещественном евклидовом пространстве E скалярное произведение векторов по абсолютной величине не превосходит произведения норм этих векторов:*

$$|(x,y)|\leqslant \|x\|\|y\|, \quad x,y\in E. \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) известно как *неравенство Коши* (или Коши–Буняковского–Шварца).

Доказательство. Если $x=\mathbf{0}$ или $y=\mathbf{0}$, то неравенство очевидно (обе части неравенства равны нулю).

Предположим, что $x\neq\mathbf{0}$ и $y\neq\mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e}=\{e_1,\dots,e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Разложим векторы x и y по данному базису: $x=\sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y=\sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. В силу предложения 1.8 имеем $(x,y)=\sum_{k=1}^n \xi^k\eta^k$. Следовательно,

$$2|(x,y)|=2\Big|\sum_{k=1}^{n}\xi^k\eta^k\Big|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\alpha}|\xi^k|\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\eta^k|$$
$$\leqslant \alpha\sum_{k=1}^{n}(\xi^k)^2+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\eta^k)^2=\alpha\|x\|^2+\frac{1}{\alpha}\|y\|^2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — любое число. Мы домножили и поделили на $\sqrt{\alpha}$ и воспользовались неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Удобно выбрать $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. При таком выборе получаем $2|(x, y)| \leqslant 2\|x\|\|y\|$. $\square$

Неравенство Коши позволяет дать корректное определение угла между векторами в вещественном евклидовом пространстве.

Определение 1.10. *Пусть $x, y \in E$, причем $x \neq \mathbf{0}$, $y \neq \mathbf{0}$. По определению, косинус угла φ между векторами x, y равен скалярному произведению этих векторов, поделенному на произведение их норм:*

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}. \tag{1.5}$$

В силу неравенства Коши модуль правой части в (1.5) не превосходит единицы. Сам угол φ определяется неоднозначно:

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}\right) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Свойства нормы

- Однородность:

  $$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

  Доказательство. Свойство вытекает из определения нормы и из билинейности скалярного произведения:

  $$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha^2(x, x) = \alpha^2\|x\|^2.$$

  $\square$

- Неравенство треугольника:

  $$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

  Доказательство. Свойство вытекает из тождества (1.2) и из неравенства Коши:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$\square$

- Положительная определенность:

$$\|x\| \geqslant 0,\ \forall x \in E; \quad \|x\| > 0,\ x \neq \mathbf{0}; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Неотрицательность $\|x\|$ вытекает из определения нормы. Положительность $\|x\|$ при $x \neq \mathbf{0}$ следует из положительной определенности скалярного произведения: $(x, x) > 0$. С учетом (1.1) получаем, что $\|x\| = 0$ только при $x = \mathbf{0}$. □

1.2. **Процесс ортогонализации.**

Предложение 1.11. *Пусть $f_1, \ldots, f_p \in E$, причем $f_j \neq \mathbf{0}$, $j = 1, \ldots, p$, и $f_j \perp f_k$ при $j \neq k$. Тогда $\{f_1, \ldots, f_p\}$ — линейно независимый набор в E.*

Доказательство. Предположим, что $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k = \mathbf{0}$. Домножим это равенство скалярно на f_j:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (f_k, f_j) = (\mathbf{0}, f_j) = 0.$$

Поскольку $(f_k, f_j) = 0$ при $k \neq j$, слева остается всего одно слагаемое: $\alpha_j \|f_j\|^2 = 0$. В силу $\|f_j\| > 0$, получаем $\alpha_j = 0$. Это верно при всех $j = 1, \ldots, p$. Значит, набор $\{f_1, \ldots, f_p\}$ линейно независим. □

Автоматически в условиях предложения 1.11 выполнено $p \leqslant n$.

Опишем теперь *процесс ортогонализации*, который позволяет по заданному базису построить новый ортонормированный базис.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — некоторый базис в E. Положим

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1.$$

Тогда $\|e_1\| = 1$. Если $n = 1$, новый базис построен. Если $n > 1$, то рассмотрим вектор

$$\widetilde{e}_2 := f_2 - (f_2, e_1) e_1.$$

Заведомо, $\widetilde{e}_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, поскольку $\widetilde{e}_2$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов f_1, f_2, причем коэффициент при f_2 равен 1. Вектор $\widetilde{e}_2$ ортогонален к e_1:

$$(\widetilde{e}_2, e_1) = (f_2 - (f_2, e_1) e_1, e_1) = (f_2, e_1) - (f_2, e_1)(e_1, e_1) = 0,$$

поскольку $(e_1, e_1) = 1$. Нормируем вектор $\widetilde{e}_2$:

$$e_2 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_2\|} \widetilde{e}_2.$$

Если $n = 2$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ построен. Если $n > 2$, делаем следующий шаг. Рассмотрим вектор

$$\widetilde{e}_3 := f_3 - (f_3, e_1) e_1 - (f_3, e_2) e_2.$$

Вектор $\widetilde{e}_3$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов f_1, f_2, f_3, причем коэффициент при f_3 равен 1. Поэтому $\widetilde{e}_3 \neq \{\mathbf{0}\}$. Вектор $\widetilde{e}_3$ ортогонален к e_1:

$$\begin{aligned}(\widetilde{e}_3, e_1) &= (f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2), e_2) \\ &= (f_3, e_1) - (f_3, e_1)(e_1, e_1) - (f_3, e_2)(e_2, e_1) = 0,\end{aligned}$$

поскольку $(e_1, e_1) = 1$ и $(e_2, e_1) = 0$. Аналогично проверяется, что $\widetilde{e}_3$ ортогонален к e_2. Нормируем вектор $\widetilde{e}_3$:

$$e_3 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_3\|}\widetilde{e}_3.$$

Если $n = 3$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ построен. Если $n > 3$, то продолжаем процесс.

Всего требуется сделать n шагов. В результате будет построен ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ такой, что

$$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$