1.3. Ортогональная сумма. Ортогональное дополнение.

Определение 1.12. *Подпространства F и G в вещественном евклидовом пространстве E называются ортогональными (пишем $F \perp G$), если $(f, g) = 0$ при любых $f \in F$ и $g \in G$.*

Предложение 1.13. *Пусть F и G — ортогональные подпространства в вещественном евклидовом пространстве E. Тогда $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, и следовательно, линейная сумма $F + G$ является прямой суммой.*

Доказательство. Пусть $x \in F \cap G$. Поскольку любой элемент из F ортогонален любому элементу из G, то x сам себе ортогонален: $(x, x) = 0$. В силу свойства положительной определенности отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$. □

Определение 1.14. *Прямая сумма $F \dotplus G$ ортогональных подпространств F и G называется ортогональной суммой и обозначается $F \oplus G$.*

Определение 1.15. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E. Ортогональным дополнением подпространства F называется множество*

$$F^{\perp} := \{g \in E : (g, f) = 0, \ \forall f \in F\}.$$

Предложение 1.16. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства F. Тогда справедливы следующие свойства*:

1) $F^{\perp}$ *— подпространство в* E;
2) F *и* $F^{\perp}$ *— ортогональные подпространства*;
3) $F \oplus F^{\perp} = E$;
4) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Доказательство. 1) Проверим, что множество $F^{\perp}$ замкнуто относительно сложения и умножения на число. Пусть $g_1, g_2 \in F^{\perp}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(\alpha g_1 + \beta g_2, f) = \alpha(g_1, f) + \beta(g_2, f) = 0, \quad \forall f \in F.$$

Следовательно, $F^{\perp}$ — подпространство пространства E.

2) Из определения $F^{\perp}$ вытекает, что $F^{\perp} \perp F$.

3) Рассмотрим ортогональную сумму $F \oplus F^{\perp}$ и покажем, что $F \oplus F^{\perp} = E$. Требуется проверить, что любой элемент $x \in E$ можно представить в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Если $F = \{\mathbf{0}\}$, то $F^\perp = E$ и утверждение очевидно. Если $F \neq \{\mathbf{0}\}$, то выберем какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \dots, f_m\}$ в F (здесь $m = \dim F$). Положим

$$f = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j, \quad g = x - f. \tag{1.6}$$

Тогда $f \in F$. Проверим, что $g \in F^\perp$:

$$(g, f_k) = (x - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j, f_k) = (x, f_k) - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)(f_j, f_k)$$

$$= (x, f_k) - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)\delta_{jk} = (x, f_k) - (x, f_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Следовательно, $(g, f) = 0$ при любом $f \in F$, то есть, $g \in F^\perp$.

4) По-прежнему, пусть $\{f_1, \dots, f_m\}$ — какой-либо ортонормированный базис в F. Достроим линейно независимый набор $\{f_1, \dots, f_m\}$ до базиса в E, а затем применим к этому базису процесс ортогонализации. В итоге получится ортонормированный базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в E (причем первые m векторов не изменятся). Тогда $f_{m+1}, \dots, f_n$ образуют базис в $F^\perp$. Действительно, эти векторы принадлежат $F^\perp$, поскольку они ортогональны к $f_1, \dots, f_m$. Набор $f_{m+1}, \dots, f_n$ линейно независим. Наконец, количество векторов в этом наборе соответствует размерности подпространства $F^\perp$, ибо $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n - m$.

Проверим теперь, что $(F^\perp)^\perp = F$. Используем разложение по базису: $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$. Имеем:

$$x \in (F^\perp)^\perp \;\Leftrightarrow\; x \perp f_{m+1}, \dots, f_n$$

$$\Leftrightarrow\; \xi^k = (x, f_k) = 0,\; k = m+1, \dots, n \Leftrightarrow\; x = \sum_{j=1}^{m} \xi^j f_j \;\Leftrightarrow\; x \in F.$$

$\square$

Определение 1.17. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E и $F^\perp$ — его ортогональное дополнение. Для элемента $x \in E$ в представлении $x = f + g$, где $f \in F$, $g \in F^\perp$, элемент f называется ортогональной проекцией x на F, а g называется ортогональной составляющей.*

1.4. Изоморфизм вещественных евклидовых пространств.

Определение 1.18. *Пусть E_1 и E_2 — два вещественных евклидовых пространства. Говорят, что E_2 изоморфно E_1,* *если существует линейное взаимно-однозначное отображение* $J : E_1 \to E_2$ *такое, что*

$$(Jx, Jy)_{E_2} = (x, y)_{E_1}, \quad \forall x, y \in E_1.$$

Проверьте самостоятельно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на классе всех вещественных евклидовых пространств.

Очевидно, если E_2 изоморфно E_1 в смысле данного определения, то автоматически E_1 и E_2 будут изоморфными линейными пространствами.

Теорема 1.19. *Любое вещественное евклидово пространство размерности* n *изоморфно* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Фиксируем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в E. Рассмотрим отображение $J : E \to \mathbb{R}^n$, определенное по правилу:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k \ \mapsto \ Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Мы знаем, что это отображение линейное и взаимнооднозначное. Проверим, что J сохраняет скалярное произведение.

Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$. В силу предложения 1.8 в ортонормированном базисе скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y)_E = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k.$$

Имеем

$$Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad Jy = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения векторов в $\mathbb{R}^n$ выполнено

$$(Jx, Jy)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k.$$

Следовательно,

$$(x, y)_E = (Jx, Jy)_{\mathbb{R}^n}, \quad x, y \in E.$$

$\square$

§ 2. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве

2.1. **Линейные операторы и билинейные формы.** Мы установим взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и билинейными формами в вещественном евклидовом пространстве E.

Определение 2.1. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Билинейной формой оператора A называется форма $Q_A \in \mathcal{F}(E)$, определенная по правилу*

$$Q_A(x, y) := (Ax, y), \quad x, y \in E. \tag{2.1}$$

Предложение 2.2. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Отображение $J : \Lambda(E) \to \mathcal{F}(E)$, определенное по правилу $JA = Q_A$, где Q_A определено в (2.1), является изоморфизмом линейных пространств $\Lambda(E)$ и $\mathcal{F}(E)$.*

Доказательство. Сначала проверим, что отображение J — линейное, то есть,

$$Q_{\alpha A+\beta B} = \alpha Q_A + \beta Q_B, \quad \forall A, B \in \Lambda(E),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

При любых $x, y \in E$ имеем:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha A+\beta B}(x, y) &= ((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) \\ &= \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \alpha Q_A(x, y) + \beta Q_B(x, y) \\ &= (\alpha Q_A + \beta Q_B)(x, y). \end{aligned}$$

Сначала мы использовали определение (2.1), затем определение линейных операций над операторами. В третьем переходе учтена линейность скалярного произведения по первому аргументу, затем снова использовано определение (2.1) и, наконец, определение линейных операций над формами. Равенство (2.2) доказано.

Мы знаем, что $\dim \Lambda(E) = n^2$ и $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$. Тогда для проверки того, что линейный оператор $J : \Lambda(E) \to \mathcal{F}(E)$ является изоморфизмом, достаточно проверить тривиальность ядра $\operatorname{Ker} J$.

Пусть $A \in \operatorname{Ker} J$, то есть, $JA = Q_A = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$. Это означает, что $Q_A(x, y) = 0$ при любых $x, y \in E$. Тогда $(Ax, y) = 0$ при любых $x, y \in E$.

Сначала фиксируем $x \in E$. Вектор Ax ортогонален любому вектору $y \in E$. Следовательно, $Ax = \mathbf{0}$. Поскольку это верно для всякого $x \in E$, получаем $A = \mathbf{0}_{E\to E}$. Мы убедились, что $\operatorname{Ker} J$ тривиально. □

Следствие 2.3. *В вещественном евклидовом пространстве E для любой билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $Q = Q_A$, то есть, $Q(x, y) = (Ax, y)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.4. *Пусть E — вещественное евклидово пространство и $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Пусть $Q = Q_A \in \mathcal{F}(E)$ — билинейная форма оператора A, а $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q_A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда $a = q$.*

Доказательство. Элементы изображающей матрицы

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

оператора A определяются следующим образом: α_k^l — это l-ая координата вектора Ae_k. В силу предложения 1.8 в ортонормированном базисе l-ая координата вектора равна скалярному произведению этого вектора на орт e_l. Следовательно,

$$\alpha_k^l = (Ae_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n.$$

С другой стороны элементы изображающей матрицы

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

формы Q_A определяются следующим образом:

$$q_{kl} = Q_A(e_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Поскольку $Q_A(e_k, e_l) = (Ae_k, e_l)$, получаем

$$q_{kl} = \alpha_k^l, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

то есть, $q = a$. □

Замечание 2.5. 1) *Если базис $\mathbf{e}$ не ортонормированный, то утверждение неверно. То есть, $a \neq q$ в общем случае.*
2) *Предложение 2.4 дает конструктивный способ построить оператор A по заданной форме Q. Надо найти изображающую матрицу q формы Q в каком-либо ортонормированном базисе и построить оператор A, имеющий ту же изображающую матрицу $a = q$ в этом базисе.*

2.2. **Сопряженный (транспонированный) оператор.**

Определение 2.6. *Пусть $A \in \Lambda(E)$. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется сопряженным (или транспонированным) к оператору A, если $(Ax, y) = (x, By)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.7. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует единственный сопряженный оператор $B \in \Lambda(E)$.*

Доказательство. Докажем существование сопряженного оператора. Оператору A отвечает билинейная форма Q_A. Рассмотрим транспонированную форму Q_A^t. Ей отвечает оператор B. Проверим, что B является сопряженным к оператору A. Имеем:

$$(Ax, y) = Q_A(x, y) = Q_A^t(y, x) = (By, x) = (x, By), \quad x, y \in E.$$

Теперь докажем единственность сопряженного оператора. Пусть B и $\widetilde{B}$ — сопряженные к A операторы. Тогда $(Ax, y) = (x, By)$ и $(Ax, y) = (x, \widetilde{B}y)$ при любых $x, y \in E$. Следовательно,

$$(x, By - \widetilde{B}y) = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

Тогда при фиксированном y вектор $By - \widetilde{B}y$ ортогонален любому вектору $x \in E$. Значит, $By = \widetilde{B}y$. Это верно при всяком y. Следовательно, $B = \widetilde{B}$. □

Для сопряженного (транспонированного) оператора к оператору A используем обозначение $B = A^t = A^*$.

Свойства транспонированного оператора

- Линейность операции транспонирования:

  $$(\alpha A_1 + \beta A_2)^t = \alpha A_1^t + \beta A_2^t, \quad A_1, A_2 \in \Lambda(E),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

  Проверьте самостоятельно.
- Выполнено равенство

  $$(A^t)^t = A.$$

  Очевидно.
- Правило транспонирования композиции операторов:

  $$(AC)^t = C^t A^t, \quad A, C \in \Lambda(E).$$

  Доказательство. Свойство следует из выкладки

  $$(ACx, y) = (Cx, A^t y) = (x, C^t A^t x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

  □

- Выполнено равенство
$$I^t = I.$$
Очевидно.
- Если $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора A^t в базисе $\mathbf{e}$ служит a^t.

Доказательство. Элемент α_k^l изображающей матрицы a — это l-ая координата вектора Ae_k. В силу предложения 1.8 выполнено
$$\alpha_k^l = (Ae_k, e_l), \quad k, l = 1, \ldots, n.$$
Обозначим изображающую матрицу оператора $B = A^t$ в базисе $\mathbf{e}$ через b. Элемент β_l^k матрицы b — это k-ая координата вектора Be_l. Из предложения 1.8 следует равенство
$$\beta_l^k = (Be_l, e_k), \quad k, l = 1, \ldots, n.$$
Остается учесть, что по определению транспонированного оператора выполнено $(Ae_k, e_l) = (e_k, Be_l) = (Be_l, e_k)$. Следовательно, $\alpha_k^l = \beta_l^k$ при $l, k = 1, \ldots, n$, то есть, $b = a^t$. $\square$

- У операторов A и A^t совпадают следы, определители, характеристические многочлены, спектры:
$$\operatorname{Tr} A^t = \operatorname{Tr} A, \quad \det A^t = \det A, \quad d_{A^t}(\lambda) = d_A(\lambda), \quad \operatorname{spec} A^t = \operatorname{spec} A.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда для A^t изображающей матрицей в том же базисе служит a^t.

По определению, след, определитель и характеристический многочлен оператора совпадают со следом, определителем и характеристическим многочленом его изображающей матрицы.

Остается вспомнить, что у матриц a и a^t совпадают следы, определители, характеристические многочлены и собственные значения (корни характеристического многочлена). $\square$

2.3. **Симметричные и антисимметричные операторы.**

Определение 2.8. *Оператор $A \in \Lambda(E)$ называется симметричным, если $A^t = A$, то есть,*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in E.$$

Определение 2.9. *Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется антисимметричным, если $B^t = -B$, то есть,*

$$(Bx, y) = -(x, By), \quad \forall x, y \in E.$$

Замечание 2.10. *Очевидно, что оператор A симметричен тогда и только тогда, когда его билинейная форма Q_A симметрична. Оператор B антисимметричен тогда и только тогда, когда его билинейная форма Q_B антисимметрична.*

Предложение 2.11. *Любой линейный оператор $C \in \Lambda(E)$ однозначно представим в виде $C = A+B$, где A — симметричный, а B — антисимметричный операторы.*

Доказательство. Докажем существование требуемого представления. Пусть дан оператор C. Положим

$$A = \frac{1}{2}(C + C^t), \quad B = \frac{1}{2}(C - C^t). \tag{2.3}$$

Очевидно, $A^t = A$, $B^t = -B$ и $A + B = C$.

Теперь проверим единственность представления. Пусть $C = A + B$, причем $A^t = A$, $B^t = -B$. Тогда $C^t = A^t + B^t = A - B$. Итак,

$$C = A + B, \quad C^t = A - B.$$

Складывая эти равенства, получаем $C + C^t = 2A$. Вычитая второе равенство из первого, приходим к $C - C^t = 2B$. Мы пришли к прежним выражениям (2.3) для A и B. Это доказывает единственность. □

Определение 2.12. *Оператор $A = \frac{1}{2}(C + C^t)$ называется симметричной частью оператора C, а оператор $B = \frac{1}{2}(C - C^t)$ называется антисимметричной частью оператора C.*

Предложение 2.13. *Пусть $B \in \Lambda(E)$ — антисимметричный оператор. Тогда*

1) *квадратичная форма оператора B равна нулю*: $(Bx, x) = 0$ *при любом* $x \in E$;

2) *след оператора B равен нулю*: $\operatorname{Tr} B = 0$;

3) *если $n = \dim E$ — нечетное число, то определитель оператора B равен нулю*: $\det B = 0$.

Доказательство. 1) Поскольку $B^t = -B$, то $(Bx, y) = -(x, By)$ при любых $x, y \in E$. Подставим $y = x$. Тогда $(Bx, x) = -(x, Bx) = -(Bx, x)$. Следовательно, $(Bx, x) = 0$ при любом $x \in E$.

2) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $b \in M^n$ — изображающая матрица оператора B в базисе $\mathbf{e}$. Для B^t изображающей матрицей в том же базисе служит b^t. Поэтому равенство $B^t = -B$ означает, что $b^t = -b$, то есть, b — кососимметричная матрица. Все диагональные элементы кососимметричной матрицы равны нулю, а потому $\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} b = 0$.

3) Вспомним, что при нечетном n определитель кососимметричной матрицы $b \in M^n$ равен нулю, поскольку

$$\det b = \det b^t = \det(-b) = (-1)^n \det b = -\det b.$$

Следовательно, $\det B = \det b = 0$. □

Обсудим вопрос о том, можно ли восстановить оператор по его квадратичной форме. Предложение 2.13 показывает, что для антисимметричного оператора ответ на этот вопрос отрицательный. Противоположным образом обстоит дело для симметричного оператора.

Предложение 2.14. *Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда оператор A однозначно восстанавливается по его квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор и пусть $Q_A \in \mathcal{F}(E)$ — отвечающая ему билинейная форма: $Q_A(x, y) = (Ax, y)$, $x, y \in E$. Тогда форма Q_A симметрична.

Предположим, что мы знаем значения квадратичной формы $Q_A(x, x) = (Ax, x)$ при всех $x \in E$. По квадратичной форме однозначно восстанавливается симметричная билинейная форма (см. предложение 2.24 главы 3). А по билинейной форме однозначно восстанавливается оператор A (см. следствие 2.3). □

Следствие 2.15. *Пусть A и B — симметричные операторы в вещественном евклидовом пространстве E. Предположим, что их квадратичные формы совпадают:*

$$(Ax, x) = (Bx, x), \quad \forall x \in E.$$

Тогда $A = B$.

Замечание 2.16. *В общем случае по квадратичной форме оператора $C \in \Lambda(E)$ восстанавливается только симметричная часть $A = \frac{1}{2}(C + C^t)$ оператора C.*

2.4. **Изометрические операторы.**

Определение 2.17. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Оператор $V \in \Lambda(E)$ называется изометрическим, если V сохраняет скалярное произведение, то есть,*

$$(Vx, Vy) = (x, y), \quad \forall x, y \in E. \tag{2.4}$$

Предложение 2.18. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Оператор $V \in \Lambda(E)$ является изометрическим тогда и только тогда, когда V сохраняет норму, то есть,*

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \forall x \in E. \tag{2.5}$$

Доказательство. Необходимость очевидна: из (2.4) при $y = x$ следует (2.5).

Докажем достаточность. Пусть дано (2.5). Пусть $x, y \in E$. Имеем:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2, \tag{2.6}$$

$$\|V(x + y)\|^2 = \|Vx\|^2 + 2(Vx, Vy) + \|Vy\|^2. \tag{2.7}$$

В силу (2.5) выполнено $\|Vx\| = \|x\|$, $\|Vy\| = \|y\|$, $\|V(x + y)\| = \|x + y\|$. Отсюда и из (2.6), (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} 2(Vx, Vy) &= \|V(x + y)\|^2 - \|Vx\|^2 - \|Vy\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2(x, y). \end{aligned}$$

Мы показали, что выполнено (2.4). Это означает, что V — изометрический оператор. □

Следствие 2.19. *Изометрический оператор V является автоморфизмом пространства E.*

Доказательство. Для доказательства того, что V — автоморфизм, достаточно убедиться, что его ядро тривиально. Пусть $x \in \operatorname{Ker} V$, то есть $Vx = \mathbf{0}$. Тогда $\|Vx\| = 0$. В силу (2.5) отсюда следует, что $\|x\| = 0$. С учетом положительной определенности нормы это означает, что $x = \mathbf{0}$. Мы убедились, что $\operatorname{Ker} V = \{\mathbf{0}\}$. □

Предложение 2.20. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $V \in \Lambda(E)$. Следующие свойства равносильны*:

1) V — *изометрический оператор*;
2) $V^t V = I$;
3) $V V^t = I$;
4) $V^{-1} = V^t$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Дано: V — изометрический оператор, то есть, $(Vx, Vy) = (x, y)$ при любых $x, y \in E$. Тогда $(x, V^tVy) = (x, y)$ при любых $x, y \in E$. Отсюда следует, что $V^tV = I$.

2) $\Rightarrow$ 1). Дано: $V^tV = I$. Тогда $(Vx, Vy) = (x, V^tVy) = (x, y)$ при любых $x, y \in E$. Это означает, что V — изометрический оператор.

Свойства 2), 3) и 4) равносильны друг другу в силу теоремы об обратном операторе. $\square$

Предложение 2.21. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $V \in \Lambda(E)$ и $v \in M^n$ — его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$. Оператор V является изометрическим тогда и только тогда, когда матрица v ортогональна.*

Доказательство. Изображающей матрицей оператора V^t в базисе $\mathbf{e}$ является матрица v^t. Тогда изображающая матрица оператора V^tV в базисе $\mathbf{e}$ есть v^tv.

В силу предложения 2.20 изометричность оператора V равносильна равенству $V^tV = I$. В свою очередь это равенство равносильно тому, что изображающая матрица v^tv равна единичной матрице, то есть, матрица v ортогональна. $\square$

Предложение 2.22. *Множество всех изометрических операторов в вещественном евклидовом пространстве E образует группу (относительно умножения).*

Доказательство. Проверим, что произведение изометрических операторов V_1, V_2 снова является изометрическим оператором. Имеем:

$$\|V_1V_2x\| = \|V_2x\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, оператор V_1V_2 сохраняет норму, следовательно, он изометричен.

Очевидно, тождественный оператор I изометричен.

Наконец, проверим, что для изометрического оператора V обратный оператор V^{-1} также изометричен. Изометричность V равносильна равенству $V^tV = I$. Тогда $(V^tV)^{-1} = I$. Имеем $(V^tV)^{-1} = V^{-1}(V^t)^{-1} = V^{-1}(V^{-1})^t$. Следовательно, $V^{-1}(V^{-1})^t = I$. Это означает, что V^{-1} — изометрический оператор.

Из проверенных свойств вытекает, что множество изометрических операторов в E образует группу. $\square$

Предложение 2.23. *Определитель изометрического оператора V по абсолютной величине равен единице, то есть,* $\det V = 1$ *либо* $\det V = -1$.

Доказательство. В ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ изображающая матрица v оператора V ортогональна. Достаточно вспомнить, что определитель ортогональной матрицы по абсолютной величине равен единице. Следовательно,

$$|\det V| = |\det v| = 1.$$

□

Замечание 2.24. 1) *Множество изометрических операторов с определителем* $\det V = 1$ *образует подгруппу группы всех изометрических операторов в* E.

2) *Группа всех изометрических операторов в* n*-мерном вещественном евклидовом пространстве* E *изоморфна группе* $O(n)$ *ортогональных матриц порядка* n. *Группа изометрических операторов с* $\det V = 1$ *в пространстве* E *изоморфна группе* $SO(n)$ *собственно ортогональных матриц порядка* n.