2.5. Преобразование ортонормированных базисов. Пусть E — вещественное евклидово пространство. Считаем, что $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ — два ортонормированных базиса в E. Напомним, что оператор перехода B от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ определяется по правилу $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$ — это матрица перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Имеем:

$$\text{если} \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \text{ то } \quad Bx = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \widetilde{e}_k.$$

Поскольку оба базиса ортонормированы, в силу предложения 1.8 выполнены равенства

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2, \quad \|Bx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2.$$

Следовательно,

$$\|Bx\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, *если оба базиса ортонормированы, то оператор перехода B — изометрический, а матрица перехода b ортогональна.*

Вспомним ковариантный закон преобразования базисов и контравариантный закон преобразования координат:

$$\vec{\widetilde{\mathbf{e}}} = b^t \vec{\mathbf{e}}, \quad \vec{\widetilde{x}} = b^{-1} \vec{x}.$$

Поскольку матрица b ортогональна, то $b^{-1} = b^t$. Следовательно, *ковариантный и контравариантный законы преобразования совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

Далее, вспомним закон преобразования изображающих матриц линейных операторов в E: если оператор A имеет изображающую матрицу a в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{a}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{a} = b^{-1} a b$.

Вспомним закон преобразования изображающих матриц билинейных форм: если форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ имеет изображающую матрицу q в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{q}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{q} = b^t q b$.

Поскольку $b^{-1} = b^t$, то *законы преобразования изображающих матриц линейных операторов и билинейных форм совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

2.6. Ортопроекторы. Пусть E — вещественное евклидово пространство, F — подпространство пространства E, $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Обозначим $n = \dim E$, $m = \dim F$. Тогда $E = F \oplus F^{\perp}$ и любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Рассмотрим оператор P, сопоставляющий вектору x его ортогональную проекцию f на подпространство F: $Px = f$. Очевидно, P — линейный оператор. Действительно, если

$$x_1 = f_1 + g_1, \quad x_2 = f_2 + g_2, \quad f_1, f_2 \in F, \ \ g_1, g_2 \in F^{\perp},$$

и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha f_1 + \beta f_2) + (\alpha g_1 + \beta g_2),$$

причем $\alpha f_1 + \beta f_2 \in F$ и $\alpha g_1 + \beta g_2 \in F^{\perp}$. Следовательно,

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Определение 2.25. *Оператор $P \in \Lambda(E)$, сопоставляющий вектору $x \in E$ его ортогональную проекцию f на подпространство F, называется ортогональным проектором или ортопроектором на подпространство F.*

Замечание 2.26. *Если P — ортопроектор на подпространство F, то $P^{\perp} = I - P$ — ортопроектор на подпространство $F^{\perp}$.*

Явное описание ортопроектора P на подпространство F можно дать, если выбрать какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в подпространстве F. Тогда в силу (1.6) Px задается формулой

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j.$$

Глава 5. Комплексные евклидовы пространства

§ 1. Полуторалинейные формы в комплексном линейном пространстве

При изучении комплексных евклидовых пространств нам понадобится понятие полуторалинейной формы. Поэтому мы начнем с рассмотрения полуторалинейных форм в конечномерном комплексном пространстве.

1.1. **Полуторалинейные формы.** Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$.

Определение 1.1. *Отображение $Q : E \times E \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной формой в пространстве E, если*

$$Q(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\, Q(x_1, y) + \beta\, Q(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$
$$Q(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}\, Q(x, y_1) + \overline{\mu}\, Q(x, y_2), \quad \forall x, y_1, y_2 \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Множество всех полуторалинейных форм в пространстве E обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$. На этом множестве введем линейные операции — сложение и умножение на комплексные числа. Суммой форм $Q_1, Q_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ называется отображение $Q_1 + Q_2 : E \times E \to \mathbb{C}$, определенное по правилу

$$(Q_1 + Q_2)(x, y) := Q_1(x, y) + Q_2(x, y), \quad x, y \in E.$$

Произведением формы $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ на число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется отображение $\alpha Q : E \times E \to \mathbb{C}$, определенное по правилу

$$(\alpha Q)(x, y) := \alpha Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте, что отображения $Q_1 + Q_2$ и αQ снова являются полуторалинейными формами.

Теорема 1.2. *Множество $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ с введенными линейными операциями образует линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Предложение 1.3. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — пространство полуторалинейных форм в E. Тогда $\dim \widetilde{\mathcal{F}}(E) = n^2$.*

Доказательство. Доказательство аналогично случаю билинейных форм.

Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве E. Рассмотрим полуторалинейные формы Q^{kl}, $k, l = 1, \ldots, n$, определенные по правилу

$$Q^{kl}(x, y) = \xi^k \overline{\eta^l}, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l.$$

Покажем, что набор $\{Q^{kl}\}$ из n^2 форм образует базис в пространстве $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Отсюда будет следовать, что $\dim \widetilde{\mathcal{F}}(E) = n^2$.

Сначала проверим, что этот набор линейно независим. Предположим, что $\sum_{k,l=1}^{n}\gamma_{kl}Q^{kl}=\mathbf{0}_{\widetilde{\mathcal{F}}(E)}$. Это означает, что

$$\sum_{k,l=1}^{n}\gamma_{kl}Q^{kl}(x,y)=0,\quad \forall x,y\in E.$$

Подставим $x=e_m$, $y=e_j$ и учтем, что $Q^{kl}(e_m,e_j)=\delta^k_m\delta^l_j$:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\gamma_{kl}\delta^k_m\delta^l_j=\gamma_{mj}=0.$$

Это верно при всех $m,j=1,\dots,n$, а потому набор $\{Q^{kl}\}$ линейно независим.

Теперь проверим, что любую форму $Q\in\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ можно разложить по набору $\{Q^{kl}\}$. Пусть $x=\sum_{k=1}^{n}\xi^k e_k$ и $y=\sum_{l=1}^{n}\eta^l e_l$. Имеем:

$$Q(x,y)=Q\big(\sum_{k=1}^{n}\xi^k e_k,\sum_{l=1}^{n}\eta^l e_l\big)=\sum_{k,l=1}^{n}\xi^k\overline{\eta^l}Q(e_k,e_l)=\sum_{k,l=1}^{n}q_{kl}\xi^k\overline{\eta^l}$$
$$=\sum_{k,l=1}^{n}q_{kl}Q^{kl}(x,y)=\big(\sum_{k,l=1}^{n}q_{kl}Q^{kl}\big)(x,y),$$

где введено обозначение $q_{kl}:=Q(e_k,e_l)$. Следовательно,

$$Q=\sum_{k,l=1}^{n}q_{kl}Q^{kl},\quad q_{kl}=Q(e_k,e_l).$$

$\square$

1.2. **Изображающая матрица полуторалинейной формы.** Пусть $\mathbf{e}=\{e_1,\dots,e_n\}$ — базис в пространстве E. Пусть $Q\in\widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Обозначим

$$q_{kl}:=Q(e_k,e_l),\quad k,l=1,\dots,n. \tag{1.1}$$

Тогда

$$Q(x,y)=\sum_{k,l=1}^{n}q_{kl}\xi^k\overline{\eta^l},\quad \text{где } x=\sum_{k=1}^{n}\xi^k e_k,\ y=\sum_{l=1}^{n}\eta^l e_l. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Изображающей матрицей полуторалинейной формы $Q\in\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ в базисе* $\mathbf{e}$ *называется матрица*

$$q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1}\\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix},$$

где элементы q_{kl} *определены в* (1.1).

Обратите внимание на *особенность матрицы* q: первый номер элемента q_{kl} — это номер столбца, а второй — номер строки.

Найдем закон преобразования изображающей матрицы полуторалинейной формы.

Пусть $\mathbf{e}$ и $\widetilde{\mathbf{e}}$ — два базиса в пространстве E и пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Напомним, что элементы β_k^j матрицы b определяются из разложений

$$\widetilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ и пусть q — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$, а $\widetilde{q}$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. Тогда

$$\widetilde{q}_{kl} = Q(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = Q\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \sum_{m=1}^{n} \beta_l^m e_m\Big) = \sum_{j,m=1}^{n} \beta_k^j \overline{\beta_l^m} Q(e_j, e_m)$$

$$= \sum_{j,m=1}^{n} \overline{\beta_l^m} q_{jm} \beta_k^j = [b^* q b]_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\widetilde{q} = b^* q b. \tag{1.3}$$

Упражнение. Зададим *отношение эквивалентности* на классе матриц M^n (с комплексными элементами): будем говорить, что матрица $\widetilde{q}$ эквивалентна матрице q, если найдется неособая матрица $b \in M^n$ такая, что выполнено (1.3). Проверьте, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

1.3. **Квадратичная форма, отвечающая полуторалинейной форме.**

Определение 1.5. *Пусть* $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$*. Квадратичной формой, отвечающей полуторалинейной форме* Q*, называется отображение* $E \to \mathbb{C}$*, сопоставляющее вектору* $x \in E$ *число* $Q(x, x)$*.*

Вспомним, что для билинейных форм, зная квадратичную форму, можно восстановить лишь симметричную часть билинейной формы. Иначе обстоит дело для полуторалинейных форм.

Предложение 1.6. *В* n*-мерном линейном пространстве* E *над полем* $\mathbb{C}$ *любая полуторалинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Пусть $x, y \in E$. Рассмотрим значения квадратичной формы на векторах $x + y$ и $x + iy$:

$$Q(x+y, x+y) = Q(x,x) + Q(x,y) + Q(y,x) + Q(y,y),$$
$$Q(x+iy, x+iy) = Q(x,x) - iQ(x,y) + iQ(y,x) + Q(y,y).$$

Домножим второе равенство на i и сложим с первым:

$$\begin{aligned} &Q(x+y, x+y) + iQ(x+iy, x+iy) \\ &= (1+i)Q(x,x) + 2Q(x,y) + (1+i)Q(y,y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(x,y) = \frac{1}{2}\,&(Q(x+y,x+y) + iQ(x+iy,x+iy) \\ &-(1+i)Q(x,x) - (1+i)Q(y,y)) \,. \end{aligned}$$

Это и есть выражение полуторалинейной формы $Q(x,y)$ через значения квадратичной формы $Q(x,x)$, $Q(y,y)$, $Q(x+y,x+y)$ и $Q(x+iy,x+iy)$. □

1.4. **Сопряженная полуторалинейная форма. Эрмитовы формы.**

Определение 1.7. *Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Сопряженной формой к форме Q называется полуторалинейная форма Q^*, определенная по правилу $Q^*(x,y) = \overline{Q(y,x)}$, $x, y \in E$.*

Упражнение. Докажите следующее свойство: если $q \in M^n$ — изображающая матрица полуторалинейной формы Q в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей формы Q^* в том же базисе служит матрица q^*.

Определение 1.8. *Полуторалинейная форма Q называется эрмитовой, если*

$$Q(x,y) = \overline{Q(y,x)}, \quad \forall x, y \in E. \tag{1.4}$$

Отметим, что для эрмитовой формы выполнено $Q(x,x) = \overline{Q(x,x)}$ при любом $x \in E$. (Это следует из (1.4) при $y = x$.) Тем самым, для эрмитовой формы отвечающая ей квадратичная форма $Q(x,x)$ принимает вещественные значения.

Отметим также свойство: полуторалинейная форма Q является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее изображающая матрица q (в каком-либо базисе) эрмитова.

§ 2. Геометрия комплексного евклидова пространства

2.1. Основные понятия.

Определение 2.1. *Множество E называется комплексным евклидовым пространством, если*

1) *E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$* ($\dim E = n$);

2) *в пространстве E выделена эрмитова полуторалинейная форма Q такая, что $Q(x,x) > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$, называемая скалярным произведением векторов*:

$$(x,y) := Q(x,y), \quad x,y \in E.$$

Свойства скалярного произведения

- Полуторалинейность:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y), \quad x_1,x_2,y \in E,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C};$$

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}(x,y_1) + \overline{\mu}(x,y_2), \quad x,y_1,y_2 \in E,\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}.$$

- Эрмитовость:

$$(x,y) = \overline{(y,x)}, \quad x,y \in E.$$

- Положительная определенность:

$$(x,x) > 0, \quad \forall x \neq \mathbf{0}.$$

На протяжении этого параграфа *предполагаем, что E — комплексное евклидово пространство.*

Определение 2.2. *Говорят, что элементы $x,y \in E$ ортогональны* (*и пишут $x \perp y$*), *если* $(x,y) = 0$.

Определение 2.3. *Нормой элемента $x \in E$ называется число* $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$.

Имеется ввиду арифметическое значение корня, так что $\|x\| \geqslant 0$.

Следующие простые свойства имеют аналоги в вещественном евклидовом пространстве. Проверьте свойства самостоятельно.

- Нулевой вектор ортогонален к любому вектору x:

$$(\mathbf{0}, x) = 0, \quad \forall x \in E. \tag{2.1}$$

- Справедливо тождество

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2, \quad x,y \in E. \tag{2.2}$$

  В частности,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{если } x \perp y.$$

- Если $x \perp y$ при любом $y \in E$, то $x = \mathbf{0}$.

Определение 2.4. *Базис* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве* E *называется ортогональным, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть,* $(e_j, e_k) = 0$ *при* $j \neq k$.

Определение 2.5. *Базис* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве* E *называется ортонормированным, если*

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

В следующем пункте мы обсудим процесс ортогонализации, который показывает, что в комплексном евклидовом пространстве E размерности $n = \dim E \geqslant 1$ существует ортонормированный базис: по произвольному базису можно построить ортонормированный базис с помощью этого процесса.

Предложение 2.6. *Пусть* E *— комплексное евклидово пространство,* $\dim E = n \geqslant 1$.

1) *Если* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис в* E *и* $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, *то*

$$\xi^j = (x, e_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

2) *Если* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис в* E *и* $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$, *то*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^k}, \quad \|x\|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2.$$

Доказательство. 1) Используя линейность скалярного произведения по первому аргументу, имеем:

$$(x, e_j) = (\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \delta_{kj} = \xi^j.$$

2) Используя полулинейность скалярного произведения по второму аргументу и уже доказанное свойство 1), получаем:

$$(x, y) = (x, \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\eta^j} (x, e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \overline{\eta^j}.$$

□

2.2. **Процесс ортогонализации.** *Процесс ортогонализации* в комплексном евклидовом пространстве, который позволяет по заданному базису построить новый ортонормированный базис, описывается так же, как в вещественном евклидовом пространстве.

Пусть $f_1, \dots, f_n$ — некоторый базис в E. Полагаем $e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$. Если $n = 1$, новый базис построен. Если $n > 1$, то рассмотрим вектор $\widetilde{e}_2 := f_2 - (f_2, e_1)e_1$, а затем нормируем его: $e_2 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_2\|}\widetilde{e}_2$. Автоматически $e_2 \perp e_1$. Если $n = 2$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ построен. Если $n > 2$, продолжаем процесс.

Всего требуется сделать n шагов. В результате будет построен ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ такой, что

$$\mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

2.3. **Неравенство Коши. Свойства нормы. Примеры.**

Предложение 2.7. *В комплексном евклидовом пространстве E скалярное произведение векторов по модулю не превосходит произведения норм этих векторов:*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in E. \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) называют *неравенством Коши.*

Доказательство. Если $x = \mathbf{0}$ или $y = \mathbf{0}$, то неравенство очевидно (обе части неравенства равны нулю).

Предположим, что $x \neq \mathbf{0}$ и $y \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Разложим векторы x и y по данному базису: $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. В силу предложения 2.6 имеем $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}$. Следовательно,

$$2|(x, y)| = 2\Big|\sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}\Big| \leqslant 2\sum_{k=1}^n \sqrt{\alpha}|\xi^k| \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\eta^k|$$

$$\leqslant \alpha \sum_{k=1}^n |\xi^k|^2 + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n |\eta^k|^2 = \alpha\|x\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|y\|^2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — любое число. Удобно выбрать $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. При таком выборе получаем $2|(x, y)| \leqslant 2\|x\|\|y\|$. □

Свойства нормы

- Однородность:

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in E, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

- Положительная определенность:

$$\|x\| \geqslant 0,\ \forall x \in E; \quad \|x\| > 0,\ x \neq \mathbf{0}; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \mathbf{0}.$$

Проверьте перечисленные свойства самостоятельно по аналогии со случаем вещественного евклидова пространства.

Примеры комплексных евклидовых пространств

- $E = \mathbb{C}^n$ — комплексное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} \xi^j \overline{\eta^j}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Пример ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$ — стандартный базис

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots\ , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E = M^n$ — пространство матриц с комплексными элементами. Скалярное произведение вводится по формуле

$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^*, \quad a, b \in M^n.$$

Проверьте равенство

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}. \tag{2.4}$$

По аналогии с вещественным случаем проверьте, что введенное скалярное произведение обладает всеми нужными свойствами (полуторалинейность, эрмитовость, положительная определенность).

Проверьте, что “матричные единицы” образуют ортонормированный базис в M^n.

- E — пространство многочленов степени не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами. Введем скалярное произведение по формуле

$$(P_1, P_2) = \int_{-1}^{1} P_1(t) \overline{P_2(t)}\, dt.$$

Убедитесь, что все свойства скалярного произведения выполнены.