

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ. АЛГЕБРА. 2020 ГОД

1. Множества с бинарной операцией. Нейтральный элемент. Обратный элемент.
2. Группы. Кольца.
3. Поля. Понятие изоморфизма. Изоморфизм групп и колец.
4. Аксиоматика линейного пространства. Примеры. Изоморфизм линейных пространств.
5. Понятие линейной зависимости и независимости. Базисы, координаты.
6. Размерность линейного пространства. Изоморфизм конечномерных линейных пространств.
7. Подпространства. Линейная оболочка множества.
8. Пересечения подпространств. Линейная сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.
9. Теорема о размерности линейной суммы подпространств. Прямое дополнение подпространства.
10. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах. Определение и примеры. Линейные действия над операторами. Пространство линейных операторов $\Lambda(E, F)$.
11. Композиция операторов и ее свойства. Кольцо линейных операторов $\Lambda(E, E)$.
12. Матричное изображение линейных операторов. Примеры изображающих матриц. Изоморфизм пространства операторов $\Lambda(E, F)$ и пространства матриц $M^{m,n}$.
13. Изображающая матрица композиции операторов. Изоморфизм кольца операторов $\Lambda(E, E)$ и кольца матриц M^n .
14. Образ и ранг линейного оператора. Ядро линейного оператора.
15. Обратный оператор.
16. Типы линейных отображений. Альтернатива Фредгольма.
17. Преобразования базисов, координат и изображающих матриц линейных операторов.
18. Определитель и след линейного оператора. Ориентация в вещественном конечномерном линейном пространстве.
19. Характеристический многочлен и спектр оператора. Собственные элементы и собственные подпространства. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений.
20. Прямая сумма собственных подпространств. Критерий существования собственного базиса. Диагонализуемость.
21. Функции от линейных операторов. Тождество Кэли.
22. Линейные формы. Двойственное пространство. Двойственные базисы.
23. Второе двойственное пространство.
24. Преобразования двойственных базисов и координат в E' . Преобразования изображающих матриц линейных операторов из E' в E' , из E в E' , из E' в E .
25. Билинейные формы. Определение, примеры. Пространство билинейных форм.
26. Оператор билинейной формы. Изображающая матрица билинейной формы. Преобразование изображающих матриц билинейной формы.
27. Ядро и ранг билинейной формы. Транспонированная форма. Симметричные и антисимметричные формы.

28. Квадратичная форма. Теорема о приведении симметричной билинейной формы к простейшему виду (о приведении квадратичной формы к сумме квадратов).
29. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов в вещественном случае. Закон инерции квадратичных форм.
30. Вещественные евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортонормированные базисы. Изоморфизм вещественных евклидовых пространств.
31. Неравенство Коши в вещественном евклидовом пространстве. Свойства нормы. Процесс ортогонализации.
32. Ортогональная сумма подпространств в вещественном евклидовом пространстве. Ортогональное дополнение.
33. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве. Билинейная форма оператора.
34. Сопряженный (транспонированный) оператор в вещественном евклидовом пространстве. Симметричные и антисимметричные операторы.
35. Изометрические операторы в вещественном евклидовом пространстве. Преобразование ортонормированных базисов. Ортопроекторы.
36. Полуторалинейные формы в комплексном линейном пространстве. Изображающая матрица полуторалинейной формы. Квадратичная форма.
37. Комплексные евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортонормированные базисы. Изоморфизм комплексных евклидовых пространств.
38. Неравенство Коши в комплексном евклидовом пространстве. Свойства нормы. Ортогональная сумма подпространств. Ортогональное дополнение.
39. Линейные операторы в комплексном евклидовом пространстве. Связь линейных операторов и полуторалинейных форм.
40. Сопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора. Ортопроекторы.
41. Самосопряженные операторы.
42. Унитарные операторы. Преобразование ортонормированных базисов в комплексном евклидовом пространстве.
43. Диагонализация самосопряженного оператора. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Диагонализация симметричного оператора в вещественном евклидовом пространстве.
44. Диагонализация унитарного оператора. Спектральное разложение унитарного оператора.
45. Диагонализация эрмитовых и унитарных матриц. Диагонализация симметричных вещественных матриц.
46. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием координат. Применение к поверхностям второго порядка.
47. Классификация поверхностей второго порядка.
48. Положительно определенные операторы. Обобщенная задача на собственные значения.
49. Приведение эрмитовой формы к простейшему виду. Одновременное приведение двух эрмитовых форм к простейшему виду.
50. Понятие о жордановой нормальной форме.
51. Леммы о взаимно простых многочленах. Лемма о нильпотентном операторе.

52. Теорема разложения по корневым подпространствам.
53. Жорданова нормальная форма для нильпотентного оператора.

Вопросы 1–21 выносятся на коллоквиум.