Экзаменационные вопросы
по курсу "Пространства Соболева и их приложения"
4 курс, лектор Т.А.Суслина

1. Усреднения функций. Определение и свойства.
2. Финитные функции. Плотность множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Аналог основной леммы вариационного исчисления.
3. Определение и свойства обобщенных производных. Замкнутость операции обобщенного дифференцирования.
4. Правило дифференцирования произведения. Замена переменных. Равенство нулю для производных.
5. Свойство абсолютной непрерывности. Примеры обобщенных производных.
6. Пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$. Определение и свойства.
7. Пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$.
8. Неравенство Фридрихса.
9. Звездные области. Плотность множества $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $W_p^l(\Omega)$.
10. Продолжение функций класса $W_p^l(\Omega)$.
11. Интегральные операторы в $L_p(\Omega)$. Условия компактности интегрального оператора из $L_p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega}_m)$. Условия ограниченности интегрального оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega_m)$. (Леммы 1, 2)
12. Интегральные операторы в $L_p(\Omega)$. Условия компактности интегрального оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega_m)$ и из $L_p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega}_m)$. (Леммы 3-5)
13. Интегральное представление для функций из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.
14. Теоремы вложения для $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.
15. Теоремы вложения для $W_p^1(\Omega)$.
16. Теоремы вложения для $W_p^l(\Omega)$.
17. Эквивалентные нормировки для $W_p^l(\Omega)$.
18. Интерполяционные неравенства.
19. Пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$ с произвольным s. Теорема о плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$.
20. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Теоремы о сопряженности H^s и H^{-s}.
21. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Теорема об эквивалентной норме при дробном $s > 0$.
22. Теоремы о следах в $H^s(\mathbb{R}^n)$.
23. Теоремы о продолжении с $\mathbb{R}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.
24. Пространства $H^s(\Omega)$; два подхода к их определению. Теоремы о следах.
25. Задача Дирихле для оператора Лапласа.
26. Задача Дирихле для оператора Лапласа со спектральным параметром. Разложение по собственным функциям.

27. Задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Энергетическое неравенство. Разрешимость в $H^1(\Omega)$.
28. Задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Расположение спектра. Разложение по собственным функциям симметричных эллиптических операторов.
29. Задача Неймана и третья краевая задача.
30. Второе основное неравенство для эллиптических операторов.
31. Повышение гладкости решений эллиптического уравнения внутри области.
32. Повышение гладкости решений задачи Дирихле вблизи границы. Теорема о разрешимости задачи Дирихле в $H^2(\Omega)$.
33. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Разрешимость в классе $H_0^{\Delta,1}(Q_T)$.
34. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема единственности в классе $L_2(Q_T)$. Энергетическое соотношение.
35. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Разрешимость в энергетическом классе.