Вариационное исчисление. Лекция 1 апреля.

3 апреля 2020 г.

1 Задача о брахистохроне

Вернемся к сказанному ранее об этой задаче. Брахистохрон – кривая наискорейшего спуска. Задача о ее нахождении была поставлена Бернулли в 1696 году: среди плоских кривых, соединяющих две данные точки A и B (B ниже A), лежащих в одной вертикальной плоскости, найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной оси OY, материальная точка из A достигнет B за кратчайшее время. Свяжем начало отсчета по оси Y с вертикальной координатой начальной точки движения A.

Очевидно, время движения может быть посчитано по формуле:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}.$$

Здесь ds – элементарное перемещение вдоль траектории, а v – скорость, зависящая от точки траектории. Пусть траектория материальной точки на плоскости определяется как $y(x)$. Тогда

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}} dx. \tag{1}$$

Скорость находится здесь из уравнения сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = mgy(x)$. Таким образом, задача свелась к определению траектории движения $y(x)$ при условии минимальности времени движения t.

Заметим, что функция Лагранжа

$$F = F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

не зависит явно от x.

Как мы обсуждали на прошлой лекции, выражение для первого интеграла в этом случае имеет вид

$$C_1 = F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}. \tag{2}$$

Таким образом, из уравнения (2) следует, что

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{C_1\sqrt{y}}. \tag{3}$$

Выразим отсюда y'^2:

$$y'^2 = \frac{1-C_1^2 y}{C_1^2 y}. \tag{4}$$

Отметим, что из уравнения (3) следует, что $0 < C_1^2 y < 1$. Введем параметризацию

$$C_1^2 y = \sin^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 - cos(v)). \tag{5}$$

Подставляя параметризацию (5) в уравнение (4), получаем

$$y'^2 = \cot^2\frac{v}{2}.$$

В соответствии с выбранным напрвлением осей X и Y нетрудно убедиться, что $y'(x) > 0$ вдоль всей траектории. Иначе говоря,

$$y' = \cot\frac{v}{2} \quad \text{или} \quad dy = \cot\frac{v}{2}dx \tag{6}$$

Вычисляя дифференциал левой и правой части уравнения (5), получаем

$$C_1^2 dy = \frac{1}{2}\sin(v)dv. \tag{7}$$

Выражая dy из уравнения (7) и подставляя в уравнение (6), получаем

$$\cot\frac{v}{2}dx = \frac{1}{2C_1^2}\sin(v)dv. \tag{8}$$

Наконец, вычисляя dx из уравнения (8), имеем

$$dx = \frac{1}{2C_1^2}\frac{\sin(v)dv}{\cot\frac{v}{2}} = \frac{1}{C_1^2}\sin^2\frac{v}{2}dv = \frac{1}{C_1^2}(1-\cos(v))dv.$$

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$x = \frac{1}{C_1^2}(v - \sin(v)) + C_2. \tag{9}$$

Из уравнения (5) следует, что

$$y = \frac{1}{C_1^2}(1-\cos(v)). \tag{10}$$

Поскольку, согласно постановке задачи, $x_0 = y_0 = 0$, то $v_0 = 0$, а следовательно, $C_2 = 0$. Таким образом, уравнения (9)-(10), параметризующие траекторию движения материальной точки, принимают окончательный вид

$$\begin{cases} x = \frac{1}{C_1^2}(v-\sin(v)) \\ y = \frac{1}{C_1^2}(1-\cos(v)). \end{cases} \tag{11}$$

Система уравнений (11) параметризует циклоиду.

2 Задача о наименьшей поверхности вращения.

Вспомним постановку задачи. Рассмотрим кривую $y(x)$ на плоскости, соединяющую точки A и B. Рассмотрим поверхность, которая возникает при вращении кривой в трехмерном пространстве относительно оси ox. Площадь такой поверхности определяется как

$$S = \int_A^B 2\pi y dl,$$

где dl – элементарная длина перемещения вдоль кривой $y(x)$. Тогда

$$S = 2\pi\int_{x_A}^{x_B} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \tag{12}$$

В данном случае задача сводится к определению уравнения кривой $y(x)$ при условии минимальности площади поверхности S.

Как и в задаче о брахистохроне, функция Лагранжа $F = F(y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от x.

Вновь можно воспользоваться первым интегралом:

$$C_1 = F - y'F_{y'} = y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Таким образом,

$$y'^2 = \left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1$$

или

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}} = \pm dx. \tag{13}$$

Воспользуемся параметризацией

$$y = C_1\cosh(t), \qquad t \geq 0. \tag{14}$$

Подстановка параметризации (14) в уравнение (13) с учетом уравнения $dy = C_1\sinh(t)dt$ дает

$$dx = \pm\frac{C_1\sinh(t)dt}{\sqrt{\sinh^2(t)}} \quad \text{или} \quad dx = C_1 dt. \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (15), с учетом (14), получаем

$$x = C_1 t + C_2 = C_1 \mathrm{arcch}\left(\frac{y}{C_1}\right) + C_2. \tag{16}$$

Наконец, выражая из уравнения (16) $y(x)$, получаем

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right). \tag{17}$$

Фиксируя постоянные C_1 и C_2 условиями прохождения кривой $y(x)$ через начальную $A = (x_A, y_A)$ и конечную $B = (x_B, y_B)$ точки траектории:

$$y(x_A) = y_A, \qquad y(x_B) = y_B, \tag{18}$$

получим окончательное решение.

3 Обобщения простейшей вариационной задачи.

Рассмотрим некоторые обобщения простейшей вариационной задачи.

3.1 Случай функционала, зависящего от нескольких функций.

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y'z')dx. \tag{19}$$

Будем рассматривать следующие краевые условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1. \tag{20}$$

Задача заключается в отыскании функций $y(x)$ и $z(x)$, доставляющих экстремум функционалу $J[y, z]$ и удовлетворяющих краевым условиям.

Для решения задачи рассмотрим пробные функции η_1 и η_2, $\quad \eta_{1,2} \in C^1_{[x_1, x_2]}$, удовлетворяющие условиям

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0. \tag{21}$$

Как и ранее, в случае зависимости функционала от одной функции, введем по определению функцию

$$f(t_1, t_2) = J[y + t_1\eta_1, z + t_2\eta_2].$$

Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}|_{t_1=t_2=0} = \frac{\partial f}{\partial t_2}|_{t_1=t_2=0} = 0. \tag{22}$$

Первое из равенств (22) дает следующий результат

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}|_{t_1=t_2=0} = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{x_0}^{x_1} dx F\left(x, y + t_1\eta_1, z + t_2\eta_2, y' + t_1\eta_1', z' + t_2\eta_2'\right)|_{t_1=t_2=0} = \tag{23}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta_1'\right) dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta_1 \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_1 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta_1 = 0.$$

Внеинтегральный член оказался равен нулю согласно условиям (21).

Согласно Осеновной Лемме вариационного исчисления мы делаем вывод, что справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{24}$$

Аналогично, второе условие в уравнении (22)

$$\frac{\partial f}{\partial t_2}|_{t_1=t_2=0} = 0$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0.. \tag{25}$$

Окончательно, мы получаем систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \end{cases} \tag{26}$$