Вариационный смысл собственных чисел и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Лекция 6 мая.

8 мая 2020 г.

1 Основные понятия.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2)dx, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{2}$$

при наличии дополнительного условия

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \rho y^2 dx = 1. \tag{3}$$

Рассматриваем задачу о поиске экстремума функционала (1) при условии (3) как изопериметрическую задачу. Построим расширенный функционал с функцией Лагранжа

$$H = py'^2 + qy^2 - \lambda\rho y^2,$$

в которой параметр *lambda* является множителем Лагранжа. Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 2qy - 2\lambda\rho y - 2(py')' = 0.$$

Иначе говоря, мы получаем уравнение

$$(py')' + (\lambda\rho - q)y = 0,$$

которое вместе с граничными условиями (2) порождает задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} (py')' + (\lambda\rho - q)y = 0, \\ y(x_0) = y(x_1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

2 Задача Штурма-Лиувилля.

Пусть λ_n – собственные числа, а y_n – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, сформулированной в (4). Вычислим значение функционала на экстремали:

$$J[y_1] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2_1 + qy_1^2)dx = py'_1 y_1|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (py'_1)'y_1 dx + \int_{x_0}^{x_1} qy_1^2 dx.$$

Внеинтегральный член обращается в ноль согласно граничным условиям задачи Штурма-Лиувилля (4). Следовательно,

$$J[y_1] = \int_{x_0}^{x_1} (-(py'_1)' + qy_1)y_1 dx = \lambda_1 \int_{x_0}^{x_1} \rho y_1^2 dx = \lambda_1.$$

Мы воспользовались в последнем равенстве дифференциальным уравнением задачи Штурма-Лиувилля (4) и условием (3).

Таким образом, мы получили, что λ_1 – наименьшее значение нашего функционала при условии (3)

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho y^2 dx = 1.$$

2.1 Смысл второго собственного числа.

Сформулируем теперь следующую задачу. Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2)dx, \tag{5}$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{6}$$

при наличии двух дополнительных условий

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \rho y^2 dx = 1, \tag{7}$$

$$J_2[y] = \int_{x_0}^{x_1} \rho y y_1 dx = 0. \tag{8}$$

Для решения поставленной задачи мы, как и выше, должны рассмотреть расширенный функционал с функцией Лагранжа

$$H = py'^2 + qy^2 - \lambda\rho y^2 - \eta\rho y y_1,$$

где λ и η – некоторые числа (множители Лагранжа).

Построим уравнение Эйлера

$$2qy - 2\lambda\rho y - \eta\rho y_1 - 2(py')' = 0.$$

Отметим, что функция y_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) при $\lambda = \lambda_1$. Таким образом, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} (py')' + (\lambda\rho - q)y = -\frac{\eta}{2}\rho y_1 \\ (py_1')' + (\lambda_1\rho - q)y_1 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Домножим первое уравнение системы (9) на y_1, а второе – на y и вычтем одно из другого. Результат проинтегрируем по dx по отрезку $[x_0, x_1]$:

$$-\frac{\eta}{2}\int_{x_0}^{x_1} \rho y_1^2 dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[(py')'y_1 - (py_1')'y\right] dx + \int_{x_0}^{x_1} [(\lambda\rho - q)yy_1 - (\lambda_1\rho - q)y_1 y]dx =$$

$$= py'y_1|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} py'y_1' dx - py_1'y|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} py_1'y'dx + \lambda\int_{x_0}^{x_1} \rho yy_1 dx - \lambda_1\int_{x_0}^{x_1} \rho y_1 y dx = 0.$$

Мы воспользовались здесь тем, что внеинтегральные члены обращаются в ноль вследствие граничных условий (6), а интеграл $\int_{x_0}^{x_1} \rho yy_1 dx$ равен нуля вследствие условия (8). Таким образом, мы получили, что

$$\frac{\eta}{2}\int_{x_0}^{x_1} \rho y_1^2 dx = 0.$$

В силу условия (3) получаем, что

$$\eta = 0.$$

Таким образом, первое из уравнений (9) (или уравнение Эйлера для данной задачи) принимает вид

$$(py')' + (\lambda\rho - q)y = 0. \tag{10}$$

Совместно с граничными условиями (6) это означает, что экстремаль задачи (5)-(8) также является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (4).

Сформулируем

Утверждение 1: *λ_2 является минимумом функционала (5) при условиях (6)-(8). Этот минимум доставляется собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (4) y_2.*

Сформулируем также

Утверждение 2: *Собственное число λ_n есть наименьшее значение функционала*

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2)dx, \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{11}$$

при условиях

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho y^2 dx = 1, \qquad \int_{x_0}^{x_1} \rho yy_j dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Это значение достигается при $y = y_n$, где y_n – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (4), отвечающая числу λ_n и нормированная по x.

3 Теорема Куранта.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2)dx, \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0,$$

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \rho y^2 dx = 1, \tag{13}$$

$$J_{j+1}[y] = \int_{x_0}^{x_1} \rho y z_j dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \tag{14}$$

где $z_j, \; j = 1, 2, \dots, n-1$ – некоторые произвольные функции.

Пусть

$$\mu(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \min_{J_j, \; j=1,2,\dots,n-1} J.$$

Иными словами, при некотором фиксированном наборе функций $z_j, \;\; j = 1, 2, \dots, n-1$ и при выполнении условий (14) число $\mu(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ является минимумом функционала.

Сформулируем

Теорему (Куранта): *Справедливо неравенство*

$$\mu(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \leq \lambda_n,$$

где λ_n – n-е собственное число задачи Штурма-Лиувилля (4). При этом равенство достигается только тогда, когда $z_j = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$ (y_j – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (4)).

4 Оценка роста собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля.

4.1 Вариационное обоснование оценок.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (4):

$$\begin{cases} (py')' + (\lambda\rho - q)y = 0, \\ y(x_0) = y(x_1) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Заменим функции p и q на функции p_1 и q_1

$$p \leq p_1, \quad q \leq q_1, \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Тогда справедлива оценка

$$\lambda_n' = \min \int_{x_0}^{x_1} (p_1 y'^2 + q_1 y^2)dx \geq \min \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2)dx = \lambda_n.$$

Теперь оставим функции p и q без изменения, но уменьшим функцию ρ (заменим ρ на $\rho_1, \quad \rho \geq \rho_1 > 0$).

Выберем некоторое число $\Theta > 1$, так что будет выполняться условие нормировки

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho_1 \tilde{y}^2 dx \Theta^2 = 1,$$

где $\tilde{y}$ - искомая экстремаль функционала (при замене ρ на ρ_1.

Систему условий ортогональности в вариационной постановке задачи

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho z_j y dx = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n-1$$

сведем к следующей системе условий

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho_1 \tilde{z}_j \tilde{y} dx = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n-1,$$

где мы выбираем $\tilde{z}_j = \frac{\rho}{\rho_1 \Theta} z_j$. Таким образом, выполняется равенство $\tilde{y} = y$.

Согласно теореме Куранта справедлива следующая оценка

$$\tilde{\lambda}_n = \min J[\tilde{y}\Theta] = \Theta^2 \min J[y] = \lambda_n \Theta^2. \tag{16}$$

Вследствие оценки (16) справедливо

$$\tilde{\lambda}_n > \lambda_n.$$

На основе приведенных выше вариационных оценок приведем оценки скорости роста собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля.

4.2 Оценки.

Введем набор чисел $p_0, P_0, q_0, Q_0, r_0, R_0$ и систему неравенств

$$p_0 \le p(x) \le P_0, \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$q_0 \le q(x) \le Q_0, \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$r_0 \le r(x) \le R_0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} P_0 y'' + (\lambda r_0 - Q_0) y = 0, \\ y(x_0) = y(x_1) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Решим эту задачу и проанализируем поведение собственных чисел. Пусть параметры выбраны так, что

$$\lambda > \frac{Q_0}{r_0}. \tag{18}$$

Тогда

$$y = C_1 \cos[\sigma(x - x_0)] + C_2 \sin[\sigma(x - x_0)],$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda r_0 - Q_0}{P_0}}. \tag{19}$$

Из граничных условий следует, что

$$y(x_0) = C_1 = 0,$$

$$y(x_1) = C_2 \sin[\sigma(x_1 - x_0)] = 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_n (x_1 - x_0) = \pi n.$$

Из уравнения (19) найдем, что

$$\lambda'_n = \frac{\pi^2 n^2 P_0}{(x_1 - x_0)^2 r_0} + \frac{Q_0}{r_0},$$

что согласуется с предположением (18).

Рассмотрим теперь вторую вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} p_0 y'' + (\lambda R_0 - q_0) y = 0, \\ y(x_0) = y(x_1) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Положим теперь, что

$$\lambda > \frac{q_0}{R_0}.$$

Повторив приведенные выше вычисления, получим, что

$$\lambda''_n = \frac{\pi^2 n^2 p_0}{(x_1 - x_0)^2 R_0} + \frac{q_0}{R_0}.$$

Полученные оценки позволяют сделать следующий вывод

$$A_n^2 \le \lambda''_n \le \lambda_n \le \lambda' \le B_n^2,$$

где мы ввели обозначения

$$A_n = \frac{\pi^2 n^2 p_0}{(x_1 - x_0)^2 R_0}, \qquad B_n = \frac{\pi^2 n^2 P_0}{(x_1 - x_0)^2 r_0}.$$

Получены оценки скорости роста собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля при больших n.