Вариационное исчисление. Лекция 7 апреля.

7 апреля 2020 г.

1 Обобщения простейшей вариационной задачи (продолжение)

1.1 Случай функционала, зависящего от старших производных

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

и набор граничных условий

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = {y'}_0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = {y'}_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}.$$

Рассмотрим функцию $\eta \in C^n([x_0, x_1])$, такую что:

$$\eta(x_0) = \eta'(x_0) = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{1}$$
$$\eta(x_1) = \eta'(x_1) = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_1) = 0. \tag{2}$$

Введем, как и ранее, функцию $f(t) \equiv J[y + t\eta]$. При этом условие

$$f'(0) = 0 \tag{3}$$

является необходимым условием экстремума.

Рассмотрим левую часть равенства (3):

$$f'(0) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y + t\eta, y' + t\eta', \dots, y^{(n)} + t\eta^{(n)}) \Big|_{t=0} = \tag{4}$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)} \right).$$

Будем интегрировать полученное выражение по частям в следующем смысле:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx. \tag{5}$$

Мы воспользовались здесь тем, что внеинтегральный член обратился в ноль согласно условиям (1)-(2).

Аналогично выражению (5) получим для оставшихся слагаемых в (4):

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta dx. \tag{6}$$
$$\dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots$$
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)} dx = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\eta dx. \tag{7}$$

Подставляя уравнения (5)-(7) в выражение (4) и вспоминая про уравнение (3), получим

$$f'(0) = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \dots \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right)\eta(x) = 0. \tag{8}$$

Согласно Основной Лемме вариационного исчисления получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \dots \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

Таким образом, мы пришли к уравнению Эйлера для случая функционала функционала, зависящего от старших производных.

1.2 Экстремум для кратного интеграла.

Рассмотрм случай, когда аргумент функционала является функцией двух переменных. А именно, будем рассматривать функционал вида:

$$J[z] = \iint\limits_{D} F\left(x, y; z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy \tag{9}$$

при условии

$$z \Big|_{\partial D} = f. \tag{10}$$

Условие (10) означает, что на границе двумерной области D значение искомой функции z описывается известной функцией f.

Задача заключается в отыскании среди всех функцций $z(x, y)$, удовлетворяющих условию (10), той функции, которая доставляет экстремум функционалу.

Для решения задачи рассмотрим пробные функции $\eta \in C^1(D)$ (непрерывные со всеми своими частными производными), удовлетворяющие условию

$$\eta \Big|_{\partial D} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим также вещественнозначную функцию $g(t) = J[z + t\eta], \quad t \in \mathbb{R}$. Как и раньше условие

$$g'(0) = 0 \tag{12}$$

является необходимым условием экстремума. Перепишем левую часть равенства

$$g'(0) = \frac{d}{dt} \iint\limits_{D} F\left(x, y; z + t\eta, \frac{\partial z}{\partial x} + t\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \Big|_{t=0} dxdy = \tag{13}$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\eta + \frac{\partial F}{\partial z'_x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z'_y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right)\right) \eta dxdy + \iint\limits_{D} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\eta\right)\right\} dxdy.$$

Применим теперь ко второму интегральному слагаемому в полученном выражении формулу Грина

$$\iint\limits_{D} \left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

вводя обозначения

$$Q(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial z'_x}\eta, \qquad P(x, y) \equiv -\frac{\partial F}{\partial z'_y}\eta. \tag{14}$$

Это означает, что второе интегральное слагаемое в выражении (13) принимает вид:

$$\iint\limits_{D} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\eta\right)\right\} dxdy = \int\limits_{\partial D} \left(-\frac{\partial F}{\partial z'_y}\eta\ dx + \frac{\partial F}{\partial z'_x}\eta\ dy\right) = 0. \tag{15}$$

Обращение выражения (15) в ноль следует из условия (11).

Теперь мы готовы переписать необходимое условие экстремума (12) в следующем виде

$$g'(0) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right)\right) \eta dxdy = 0. \tag{16}$$

Основная Лемма вариационного исчисления приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right) = 0. \tag{17}$$

Это уравнение и является уравнением Эйлера для случая кратного интеграла.

2 Замечания и дополнения.

2.1 Простая вариационная задача. функционал зависит от нескольких (n штук) функций.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y, z, \dots, v] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x; y, z, \dots, v; y', z', \dots, v'). \tag{18}$$

В этом случае имеет место система уравнений Эйлера вида

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial v'} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

В специальном случае, когда функция Лагранжа не зависит от x, то есть когда

$$F = F(y, z, \dots, v; y', z', \dots, v'),$$

первый интеграл имеет вид

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'} - \dots - v'F_{v'} = C. \tag{20}$$

Доказательство аналогично доказательству, разобранному выше для случая зависимости функции Лагранжа от y и y' ($F = F(y, y')$).

2.2 Функционал, зависящий от производных высших порядков.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \tag{21}$$

Как обсуждалось выше, уравнение Эйлера в этом случае принимает вид

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \dots \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{22}$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнение порядка $2n$.

2.2.1 Предположим, что F не зависит от $y, y', \dots, y^{(k)}$.

Тогда из уравнения (22) следует, что

$$(-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}F_{y^{(k+1)}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{23}$$

Иначе говоря,

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(k+1)}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{(k+2)}} + \dots + (-1)^{n-k-1}\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = C_k x^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots C_1 x + C_0. \tag{24}$$

2.2.2 Предположим, что F не зависит от переменной x.

В этом случае первый интеграл уравнения принимает вид

$$F - y'F_{y'} + y''F_{y''} - \dots + (-1)^n y^{(n)}F_{y^{(n)}} = C. \tag{25}$$

Доказательство аналогично доказательству, разобранному выше для случая зависимости функции Лагранжа от y и y' ($F = F(y, y')$).

Отметим, что если уравнение (22) является дифференциальным уравнением порядка $2n$, то первый интеграл (25) является дифференциальным уравнением лишь порядка n, что является весьма существенным, как и в любом случае понижения порядка уравнения.

2.3 Экстремум для кратного интеграла.

Рассмотрим функционал вида

$$J[u] = \int\int_V\int F(x,y,z;u,u'_x,u'_y,u'_z)dxdydz, \tag{26}$$

определенный на функциях вида $u = u(x,y,z)$ с граничным условием вида

$$u \underset{\partial V}{|} = f.$$

Следуя логике рассуждений, использованной выше в случае двойных интегралов, приходим к уравнению Эйлера следующего вида:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u'_z} = 0. \tag{27}$$

Отметим, что при доказательстве уравнения (27) следует также воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского, оналогично тому, как мы воспользовались формулой Грина в двумерном случае.

3 Примеры.

3.1 Пример 1. Зависимость функционала от нескольких функций.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y,z] = \int_0^1 ({y'}^2 - {z'}^2 + z^2 - y^2)dx$$

при условиях

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0.$$

Система уравнений Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -2y'' - 2y = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 2z'' + 2z = 0.$$

Решением этих уравнений является представление

$$y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x), \qquad y(0) = C_1 = 0, \quad y(1) = C_2\sin(1) = 1,$$

$$z = C_3\cos(x) + C_4\sin(x), \qquad z(0) = C_3 = 1, \quad z(1) = \cos(1) + C_4\sin(1) = 0.$$

Отсюда находим окончательное решение

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)},$$

$$z(x) = \cos(x) - \cot(1)\sin(x) = -\frac{\sin(x-1)}{\sin(1)}.$$

3.2 Пример 2. Случай кратного интеграла.

Пусть φ – потенциал электрического поля в области $D \in \mathbb{R}^3$, $\vec{E} = -\nabla\varphi$ – напряженность электрического поля, а $W_\rho = \gamma|\vec{E}|^2$ – плотность энергии электрического поля, γ – некоторая постоянная.

Задача состоит в нахождении вида потенциала φ, обеспечивающего минимум энергии электрического поля.

Таким образом, задача сводится к нахождению экстремалей функционала

$$J[\varphi] = \int\int_D\int |\nabla\varphi|^2 dxdydz. \tag{28}$$

В данном случае функция Лагранжа принимает вид

$$F = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Уравнение Эйлера в этом случае, согласно (27) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \varphi'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \varphi'_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \varphi'_z} = 0. \tag{29}$$

Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi'_x} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi'_y} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi'_z} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

уравнение (29) принимает вид

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{то есть} \quad \Delta\varphi = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: гармонические потенциалы доставляют минимум энергии электрического поля.