Задачи со связями. Задача Лагранжа. Лекция 8 апреля.

10 апреля 2020 г.

1 Постановка задачи. Некоторые примеры

1.1 Примеры 1. Задача о движении плоского маятника.

В качестве одного из примеров задачи Лагранжа можно упомянуть задачу о движении плоского маятника.

Пусть невесомый нерастяжимый подвес длины l закреплен одним концом в начале координат (на плоскости (X,Y)). Пусть $x(t),\ y(t)$ – координаты материальной точки массы m, закрепленной на свободном конце подвеса и нгаходящейся в поле силы тяжести.

Составим функционал действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) - mgy \right) dt. \tag{1}$$

Экстремум минимум этого функционала при условии связи

$$x^2 + y^2 = l,$$

фиксирующей длину подвеса, а также при наборе краевых условий вида

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1,$$

определит траекторию движения материальной точки на плоскости

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Рассмотрим еще один пример.

1.2 Пример 2. Задача о геодезических.

Геодезической линией на поверхности называется кривая, лежащая на поверхности, соединяющая две фиксированные точки этой поверхности и имеющая наименьшую длину.

Пусть уравнение поверхности в $\mathbb{R}^3$ определяется следующим образом:

$$G(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

и, тем самым, определяет условие связи. Координаты концов кривой на поверхности определяются как $A(x_0, y_0, z_0), \quad B(x_1, y_1, z_1)$. Кривая описывается с помощью параметризации:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Таким образом, краевые условия принимают вид:

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad z(t_0) = z_0, \tag{4}$$
$$x(t_1) = x_1, \qquad y(t_1) = y_1, \qquad z(t_1) = z_1.$$

В этом случае длина кривой определяется следующим образом:

$$l[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{5}$$

Экстремум минимум функционала (5) при выполнении уравнения связи (2) и краевых условий (4) определяет уравнение экстремали - геодезической линии.

2 Задача Лагранжа.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx \tag{6}$$

при наличии дополнительного условия (связи):

$$G(x,y,z) = 0, \tag{7}$$

а также набора краевых условий

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \qquad z(x_0) = z_0, \qquad z(x_1) = z_1. \tag{8}$$

Задача заключается в нахождении дважды непрерывно дифференцируемых и доставляющих экстремум функционалу (6) функций $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющих условиям (7)-(8).

При решении поставленной задачи предположим, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0. \tag{9}$$

Тогда по теореме о неявной функции разрешим уравнение (7) относительно переменной z:

$$z = \varphi(x,y). \tag{10}$$

Подставим (10) в исходный функционал (6):

$$J[y,\varphi(x,y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx\tilde{F}(x,y,\varphi(x,y),y',\varphi'_x + \varphi'_y y'). \tag{11}$$

Мы пользуемся здесь обозначением

$$\tilde{F} = F(x,y,z,y',z')\Big|_{z=\varphi(x,y)},$$

а также выражением

$$z' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'. \tag{12}$$

Будем теперь рассматривать функционал (11), как зависящий лишь от функции $y(x)$ (поскольку $\varphi(x,y)$ определяется условием связи (7)) и запишем для этого случая уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = 0. \tag{13}$$

Первое слагаемое уравнения (13) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'\right). \tag{14}$$

Для записи последнего слагаемого мы воспользовались уравнением (12).

Рассмотрим теперь в два этапа второе слагаемое в уравнении (13). На первом этапе вычислим

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{15}$$

Как и выше, при выводе этого соотношения мы пользуемся уравнением (12).

Второй этап вычислений приводит нас к следующему результату:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'\right). \tag{16}$$

Согласно уравнению Эйлера (13) уравнения (14) и (16) совпадают. То есть

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'\right).$$

Упрощая полученное выражение, мы приходим к результату:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{17}$$

Вернемся теперь к уравнению связи

$$G(x, y, z) \underset{z=\varphi(x,y)}{|} = 0 \tag{18}$$

и продифференцируем его по переменной y:

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}}. \tag{20}$$

Подставим теперь это выражение в уравнение (17)

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}}{\frac{\partial G}{\partial z}}. \tag{21}$$

Поскольку левая и правая части полученного равенства должны выполняться для любых y и z (которые входят в функции F и G равноправно), то левая и правая части равенства (21) от y и z не зависят.

Таким образом,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\lambda(x). \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (22) эквивалентно системе уравнений следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda(x)G) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda(x)G) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(F + \lambda(x)G) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial z'}(F + \lambda(x)G) = 0. \end{array} \right. \tag{23}$$

Система уравнений (23) является системой уравнений Эйлера для задачи Лагранжа.

2.1 Обобщение задачи Лагранжа на случай нескольких связей

Задача Лагранжа с несколькими связями заключается в отыскании экстремума функционала

$$J[\vec{Y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \vec{Y}, \vec{Y}')dx, \tag{24}$$

где

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

среди класса допустимых кривых, удовлетворяющих граничным условиям и дополнительным условиям связей вида

$$G_i(x, \vec{Y}, \vec{Y}') = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, k. \tag{25}$$

При этом число связей k должно быть меньше числа n неизвестных функций. Связи вида (25) называются неголономными. Связи, не содержащие производных неизвестных функций, называются голономными.

Если вектор-функция $\vec{Y}$ дает экстремум функционалу (24), то необходимо эта функция является экстремалью функционала

$$K[\vec{Y}] = \int_{x_0}^{x_1} H(x, \vec{Y}, \vec{Y}')dx,$$

где

$$H(x, \vec{Y}, \vec{Y}') = F(x, \vec{Y}, \vec{Y}') + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) G_i(x, \vec{Y}, \vec{Y}'),$$

а $\lambda_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$ – неизвестные функции переменной x,

$$k < dim(\vec{Y}).$$

2.2 Пример 1.

Найти экстремали функционала

$$J[y,z] = \int_{1,1,-1}^{2,1,-2} ({y'}^2 + {z'}^2)dx \tag{26}$$

при условии

$$x + y + z = 1. \tag{27}$$

Решение.

Перепишем условие связи (27) в виде, соответствующем уравнению (7)

$$x + y + z - 1 = 0, \qquad G(x,y,z) = x + y + z - 1. \tag{28}$$

Построим расширенный функционал вида $F + \lambda(x)G$ (23), где функция Лагранжа F имеет вид ${y'}^2 + {z'}^2$, а $\lambda(x)$ – неизвестная функция

$$H = F + \lambda(x)G = {y'}^2 + {z'}^2 + \lambda(x)(x + y + z - 1).$$

Система уравнений Эйлера (23)) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = \lambda(x) - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial z'} = \lambda(x) - \frac{d}{dx}(2z') = 0.$$

Иначе говоря, мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$y'' = \frac{1}{2}\lambda(x),$$

$$z'' = \frac{1}{2}\lambda(x).$$

Вычитая первое из полученных уравнений из второго, получим

$$y'' - z'' = 0. \tag{29}$$

Из условия (28) $G = x + y + z - 1 = 0$ следует в результате дифференцирования:

$$y'' + z'' = 0. \tag{30}$$

Из уравнений (29)-(30) получаем

$$y'' = z'' = 0$$

Таким образом,

$$y(x) = C_1x + C - 2, \qquad z(x) = C_3x + C_4. \tag{31}$$

Наконец, из граничных условий следует:

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$2C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_3 + C_4 = 1,$$

$$2C_3 + C_4 = -2.$$

Окончательный ответ: $y(x) = 1, \quad z(x) = -1$.