Минимаксная теория собственных значений задачи Штурма-Лиувилля. Лекция 12 мая.

11 мая 2020 г.

Пусть $z_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$ функции класса C, определенные на отрезке $[x_0, x_1]$. Обозначим через $\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ минимум функционала

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} (Py'^2 + Qy^2) dx$$

при условиях:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = 1, \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} dx z_i(x) y(x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{3}$$

Верна следующая

Теорема 1: *верхняя граница $\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ при произвольных функциях z_i равна λ_n, где λ_n – n-е собственное число соответствующей задачи Штурма-Лиувилля*

$$(Py')' + (\lambda - Q)y = 0, \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0.$$

Для доказательства этого утверждения фиксируем сначала функции $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующие n первым собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Рассмотрим n-параметрическое семейство функций:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

и подберем коэффициенты c_i так, чтобы удолетворить $n-1$ условиям:

$$\int_{x_0}^{x_1} z_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \right) dx = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{x_0}^{x_1} z_i y_j dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Уравнения (1) образуют относительно n неизвестных c_j систему $(n-1)$ линейных однородных уравнений. Поэтому всегда существует значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, где $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, удовлетворяющих этим уравнениям. Путем умножения на остоянную можно добиться, чтобы эта система значений c_i удовлетворяла также уравнению

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1. \tag{5}$$

Функция $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, отвечающая эти значениям c_i, есть функция из класса допустимых функций оставленной выше вариационной задачи, для которых нижняя граница значений функционала K равна $\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Поэтому

$$\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \leq K \left[\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \right]. \tag{6}$$

Далее

$$K\left[\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 K[y_j] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ i<j}^{n} c_i c_j K[y_i, y_j]. \tag{7}$$

Мы использовали здесь обозначение

$$K[y_i, y_j] = \int_{x_0}^{x_1} \left(P y_i' y_j' + Q y_i y_j\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[-(P y_i')' y_j + Q y_i y_j\right] dx =$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} \left[(P y_i')' - Q y_i\right] y_j dx = \lambda_i \int_{x_0}^{x_1} y_i y_j dx = 0.$$

Но мы знаем, что

$$K[y_j] = \lambda_j.$$

Поэтому

$$\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \le K\left[\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \lambda_j. \tag{8}$$

Мы увеличим правую часть уравнения (5), если заменим коэффициенты при c_j^2 наибольшим из этих коэффициентов λ_n:

$$\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \le \lambda_n \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \lambda_n. \tag{9}$$

Пусть теперь $z_i = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом $\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \lambda_n$.

Таким образом, верхняя граница $\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ равна λ_n и достигается, когда $z_i(x) = y_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Итак,

$$\lambda_n = \sup_{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}} \quad \inf_{y \subset C(z_1, \ldots, z_{n-1})} K[y]. \tag{10}$$

Теорема 1 доказана. ■

Из минимаксного определения собственных значений следует

Теорема 2: *Если коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ получают положительные приращения $\delta P(x)$ и $\delta Q(x)$, то n-е собственное значение $\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3\ldots$ возрастает.*

В самом деле, если $P(x)$ и $Q(x)$ в выражении

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} (P y'^2 + Q y^2) dx$$

возрастают, то возрастает для всякой функции $y(x)$ значение $K[y]$, а значит, возрастает и нижняя граница $K[y]$ для функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям (1)-(2), т.е. $\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Возрастает и верхняя граница $\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, т.е. λ_n.