Задача со свободными концами. Лекция 15 апреля.

17 апреля 2020 г.

1 Общая формула полной вариации.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$, и пусть известно, что один конец $A(x_0, y_0)$ закреплен, а второй конец $B(x_1, y_1)$ принадлежит некоторой кривой: $(x_1, y_1) \in l$. Будем считать, что движение точки B вдоль кривой l порождает семейство кривых $y(x, \alpha)$, параметризованное параметром α.

Введем обозначение

$$y(\alpha) = y(x, \alpha), \qquad \alpha \in (-\delta, \delta), \qquad y(x, 0) = f(x).$$

Здесь α - параметр, от которого зависит семейство кривых $y(x, \alpha)$. При значении параметра $\alpha = 0$ мы приходим к кривой $f(x)$.

Наша задача – вычислить вариацию функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

Основное отличие данной задачи от рассмотренных нами ранее заключается в том, что, как было оговорено, один из концов кривой не закреплен. Значит, возникает новая степень свободы, которая и регулируется введенным параметром α. Мы интересуемся вариацией

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y]|_{\alpha=0}. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\delta y = \frac{\partial y(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0},$$

$$\delta y' = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial y(\alpha)}{\partial x}|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \frac{d}{dx}\delta y.$$

Поскольку в точке $A(x_0, y_0)$ кривая закреплена, то

$$y(x_0, \alpha) = const, \qquad \delta y|_{x=x_0} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь вариацию

$$\delta J[y] = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1(\alpha)} F(x, y(\alpha), y'(\alpha))dx \underset{\alpha=0}{|} = F|_{x=x_1(\alpha)} {x'}_1(\alpha) \underset{\alpha=0}{|} + \int_{x_0}^{x_1(\alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx \underset{\alpha=0}{|}.$$

Здесь внеинтегральный член возникает вследствие незакрепленности одного из концов кривой. Формально причиной его возникновения является зависимость значения верхнего предела интегрирования от параметра α.

Воспользуемся тем, что в интегральном слагаемом

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \delta y' = \frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}, \tag{3}$$

а также обозначением

$${x'}_1(\alpha) \underset{\alpha=0}{|} = \delta x_1. \tag{4}$$

В этих терминах

$$\delta J[y] = F|_{x=x_1(\alpha)}\delta x_1|_{\alpha=0} + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \overset{x_1(\alpha)}{\underset{x_0}{|}} |_{\alpha=0} + \int_{x_0}^{x_1(\alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx \underset{\alpha=0}{|}. \tag{5}$$

В отличие от рассмотренных ранее задач с закрепленными концами, второе слагаемое в правой части уравнения уже не обнуляется граничными условиями, а приводит за счет зависимости от свободного параметра α к нетривиальному вкладу в уравнение (совместно с уже отмеченным выше первым слагаемым в правой части уравнения).

Для того, чтобы рассмотреть второе слагаемое уравнения (5) на верхнем пределе, нам понадобится следующее вычисление

$$\delta y_1 = \frac{d}{d\alpha} y(x_1(\alpha), \alpha)|_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx_1}{d\alpha}|_{\alpha=0} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \right) |_{x=x_1} = (y' \delta x_1 + \delta y)\, |_{x=x_1}. \tag{6}$$

Отметим, что вклад второго слагаемого уравнения (5) на нижнем пределе равен нулю вследствие условия (2).

Из уравнения (6) выразим

$$\delta y|_{x=x_1} = (\delta y_1 - y' \delta x_1)\, |_{x=x_1}. \tag{7}$$

Подставим выражение (7) в уравнение (5) и получим (с учетом (2))

$$\delta J[y] = F|_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y_1 - y' \delta x_1)\, |_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Группируя внеинтегральные члены, приходим наконец к выражению

$$\delta J[y] = \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) |_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \tag{8}$$

Уравнение (8) называется **общей формулой первой вариации**.

Интегральный член порождает уравнение Эйлера, а два первых слагаемых порождают граничные условия возникшие, как мы упоминали выше, вследствие учета возможного движения конца кривой y. Отметим еще раз, что это движение происходит вдоль фиксированной кривой l.

2 Естественные граничные условия.

2.1 Случай закрепленных концов.

Пусть $\delta y = 0$ в точке $B(x_1, y_1)$. Тогда точка $B(x_1, y_1) \in l$ зафиксирована. Тогда внеинтегральные члены равны нулю. В этом случае согласно уравнению (8)

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \tag{9}$$

Такой вид выражения для первой вариации функционала, как и следовало ожидать, совпадает с аналогичным результатом, полученным в задаче с закрепленными концами.

Если y – экстремаль, то $\delta J[y] = 0$, и по Основной Лемме вариационного исчисления

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{10}$$

2.2 Ситуация общего положения. Условие трансверсальности.

Пусть точка $B(x_1, y_1) \in l$ не закреплена. Если y – экстремаль, то

$$\delta J[y] = 0. \tag{11}$$

Отметим, что компенсация интегрального вклада и внеинтегральных членов в уравнении (8) невозможна, поскольку вклад внеинтегральных членов определется фактически формой кривой l, вариацией δy в точке $B(x_1, y_1) \in l$. В то же время вклад интегрального члена определяется вариацией δy на всей области $[x_0, x_1]$. При этом уравнение (11) должно выполняться для любых вариаций δy.

Таким образом, условие (11) требует выполнение совокупности условий

$$\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) |_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0, \tag{12}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0. \tag{13}$$

Согласно Основной Лемме вариационного исчисления из уравнения (13) следует уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{14}$$

Вернемся к условию (12). Пусть уравнение кривой l имеет вид:

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{15}$$

Точка $(x_1(\alpha), y_1(\alpha)) \in l$, то есть

$$\varphi(x_1(\alpha), y_1(\alpha)) = 0. \tag{16}$$

Варьируя левую и правую части уравнения (16), приходим к выводу

$$\delta\varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y_1 = 0. \tag{17}$$

Мы воспользовались здесь установленными выше обозначениями

$$\delta x_1 = \frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0}, \qquad \delta y_1 = \frac{dy_1(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0}.$$

В этих обозначениях уравнение (12) с учетом уравнения (17) принимает вид

$$\frac{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}|_{(x_1,y_1)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}|_{(x_1,y_1)}. \tag{18}$$

Полученное условие (18) называется **условием трансверсальности.**

Отметим, что условие трансверсальности является алгебраическим уравнением. Оно выполняется только на конце экстремали и, таким образом, играет роль граничного условия, заменяющего граничное условие в закрепленной точке.

3 Частные случаи условия трансверсальности. Естественные граничные условия.

3.1 Кривая l описывается уравнением $x = x_1$.

Пусть кривая l описывается уравнением $x = x_1$. Тогда, очевидно,

$$\delta x_1 = 0.$$

В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0.$$

Таким образом, возникает условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1} = 0, \tag{19}$$

естественное граничное условие в данном случае.

3.2 Кривая l описывается уравнением $y = y_1$.

Пусть кривая l описывается уравнением $y = y_1$. Тогда, очевидно,

$$\delta y_1 = 0.$$

В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)|_{y=y_1}\delta x_1 = 0.$$

Таким образом, возникает **естественное граничное условие** другого типа

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}|_{y=y_1} = 0. \tag{20}$$

4 Пример.

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} ({y'}^2 + 12xy)dx,$$

если известно, что точка $B(x_1, y_1)$ лежит на прямой $x = 1$.

Решение.

В данном случае функция Лагранжа $F = {y'}^2 + 12xy$ зависит от всех переменных и воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера не удается. Напишем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 12x - 2y'' = 0.$$

Следовательно,

$$y'' = 6x.$$

Интегрирование этого уравнение ведет к следующему представлению для экстремали

$$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2. \tag{21}$$

В данном случае имеется три неизвестных: постоянные C_1, C_2 и координата точки $B(1, y_1)$.

Условий также три. Первое: граничное условие

$$y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0.$$

Второе: точка $B(1, y_1)$ принадлежит экстремали

$$y_1 = x_1^3 + C_1 x_1 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = 1 + C_1.$$

Третье: естественное граничное условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1} = 2y'|_{x=x_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6 + 2C_1 = 0.$$

Окончательно получаем

$$C_1 = -3, \qquad C_2 = 0, \qquad y_1 = -2.$$

Уравнение экстремали имеет вид

$$y(x) = x^3 - 3x.$$

■