Некоторые обобщения. Лекция 21 апреля.

21 апреля 2020 г.

1 Пример. Задача о распространении луча в неоднородной среде.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} H(x,y)dx \quad - \quad \text{функционал Ферма.} \tag{1}$$

Здесь функция Лагранжа принимает специальный вид

$$F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2} H(x,y), \tag{2}$$

где H – некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Эта функция в данной задаче играет роль оптической плотности среды.

Экстремали функционала (1) описывают в частности распространение луча в неоднородной среде.

Рассмотрим, как выглядит для данного функционала условие трансверсальности

$$\frac{F - y'F_{y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}|_{(x_1,y_1)} = \frac{F_{y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}|_{(x_1,y_1)}. \tag{3}$$

Подставляя выражение (2), описывающее функцию Лагранжа F, в условие (3), получаем

$$\frac{\frac{H}{\sqrt{1+y'^2}}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}|_{(x_1,y_1)} = \frac{\frac{y'H}{\sqrt{1+y'^2}}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}|_{(x_1,y_1)} \qquad \Rightarrow \qquad y'\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_{(x_1,y_1)} = 0. \tag{4}$$

Придадим уравнению (4) определенный смысл. Рассмотрим для этого вектор $\vec{\tau}$, касательный к траектории распространения луча $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Очевидно, касательный вектор, построенный в точке (x,y) траектории имеет вид

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}.$$

Вектор нормали $\vec{n}$ к траектории (точнее - один из двух векторов нормали), проведенный в точке (x,y) , имеет вид

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнение (4) принимает вид

$$\langle \vec{n}, \nabla\varphi \rangle|_{(x_1,y_1)} = 0 \tag{5}$$

Таким образом, вектор $\nabla\varphi$ коллинеарен вектору касательной $\vec{\tau}$ к траектории луча в точке (x,y). Таким образом, семейство линий

$$\varphi(x,y) = C$$

нужно рассматривать как семейство линий уровня оптической плотности среды. Отметим, что это же семейство линий для данной задачи должно рассматриваться как семейство трансверсалей.

2 Условия трансверсальности в $\mathbb{R}^3$.

2.1 Свободная точка принадлежит поверхности.

Рассмотрим задачу о остроении экстремалей функционала вида

$$J[y,z] = \int_A^B F(x,y,z,y',z'). \tag{6}$$

Пусть точка $A(x_0, y_0, z_0)$ закреплена, а точка B принадлежит поверхности, которая описывается уравнением

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Тогда в точке B имеет место следующее условие трансверсальности

$$\frac{F - y'F_{y'} - z'F_{z'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}|_B = \frac{F_{y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}|_B = \frac{F_{z'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}|_B. \tag{7}$$

2.2 Свободная точка принадлежит кривой.

Рассмотрим задачу о остроении экстремалей функционала вида

$$J[y, z] = \int_A^B F(x, y, z, y', z'). \tag{8}$$

Пусть точка $A(x_0, y_0, z_0)$ закреплена, а точка B принадлежит кривой, которая параметрически описывается уравнениями

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x).$$

Тогда условие трансверсальности в точке B принимает вид

$$F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}|_B = 0. \tag{9}$$

3 Поле экстремалей.

I.**Поле экстремалей.**

Пусть $y(x, \alpha)$ – семейство решений уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Согласно сказанному ранее, мы можем рассматривать семейство кривых $y(x, \alpha)$ как семейство экстремалей, проходящих через закрепленную точку A.

Определение: семейство $y(x, \alpha)$ называется полем, если
1) через любую точку, принадлежащую области D, проходит единственная кривая из этого семейства.
2) функция $y(x, \alpha)$ непрерывна по совокупности переменных (x, α).

Определение: функция $u(x, y)$ называется наклоном поля.

Пусть известен наклон поля $u(x, y)$. Тогда поле $y(x, \alpha)$ – решение уравнения

$$y' = u(x, y).$$

(Постоянная α рассматривается как постоянная в решении дифференциального уравнения первого порядка.)

В смысле введенных выше терминов рассмотрим уравнение Эйлера.

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = F'{}_y - F''_{xy'} - F''_{yy'}y' - F''_{y'y'}y'' = 0. \tag{10}$$

Поскольку $y' = u(x, y)$, то

$$y'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' = \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теперь уравнение (10) принимает вид

$$F'_y(x, y, u) - F''_{xy'}(x, y, u) - uF''_{yy'}(x, y, u) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}\right)F''_{y'y'}(x, y, u) = 0. \tag{11}$$

Дальнейшие наши построения будут основываться на этом утверждении.

4 Поле трансверсалей.

Пусть дано поле экстремалей некоторой вариационной задачи. Рассмотрим следующий **вопрос:** как провести семейство кривых, которые с каждой экстремалью пересекуются трансверсально.

Начнем с того, что вспомним полученное нами ранее условие трансверсальности в точке сопряжения трансверсали и некоторой кривой:

$$(F - y'F'_{y'})\delta x + F'_{y'}\delta y = 0. \tag{12}$$

Отметим, что мы не фиксируем здесь уравнение кривой $\varphi(x, y) = 0$, сопряженной экстремали, и, тем самым оставляем свободными параметры δx и δy. [Как мы видели ранее, в случае, когда форма кривой фиксирована, работает уравнение связи $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y = 0$.]

Сформулируем следующее

Утверждение 1:

Уравнение (12) является уравнением в полных дифференциалах вида $d\Theta(x, y) = 0$ *для некоторой функции* $\Theta(x, y)$, *так что*

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} \equiv (F - y'F'_{y'})|_{y'=u(x,y)}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} \equiv F'_{y'}|_{y'=u(x,y)}.$$

Для доказательства этого утверждения проверим справедливость следующего уравнения:

$$\frac{F - uF'_{y'}}{\partial y} = \frac{\partial F'_{y'}}{\partial x}. \tag{13}$$

Отметим, что функция Лагранжа F должна здесь рассматриваться как функция зависящая лишь от пары переменных (x, y), то есть $F = F(x, y, y')|_{y'=u(x,y)}$.

В этом смысле левая часть (L.H.S.) равенства (13):

$$L.H.S. = F'_y + F'_{y'}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}F'_{y'} - uF''_{yy'} - uF''_{y'y'}\frac{\partial u}{\partial y} = F'_y - uF''_{yy'} - uF''_{y'y'}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{14}$$

Правая часть (R.H.S.) равенства (13) имеет вид:

$$R.H.S. = F''_{xy'} + F''_{y'y'}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{15}$$

Вычитая из уравнения (14) уравнение (15), получим:

$$(L.H.S.) - (R.H.S.) = F'_y - F''_{xy'} - uF''_{yy'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}\right)F''_{y'y'}. \tag{16}$$

Согласно уравнению Эйлера (11) получим, что выражение (16) обращается в ноль.

Таким образом, мы доказали справедливость Утверждения 1 ■.

Мы нашли также полный интеграл

$$\Theta(x, y) = Const \tag{17}$$

уравнения (12)

$$d\Theta = (F - uF'_{y'})dx + F_{y'}dy = 0. \tag{18}$$

Разрешая уравнение (17) относительно $y(x, C)$, получим выражение для **поля трансверсалей.**

Возвращаясь к рассмотренной выше задаче о функционале Ферма и распространении света в неоднородной среде, отметим, что найденный нами общий интеграл уравнения (18) $\Theta = Const$ описывает в этой звдаче линии уровня оптической плотности среды $\varphi(x, y) = Const$.

Сформулируем

Утверждение 2: *Общий интеграл уравнения (18) можт быть вычислен следующим образом:*

$$\Theta(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F(x, y, u(x, y))dx, \tag{19}$$

если точки (x_0, y_0) *и* (x, y) *принадлежат одной экстремали.*

Докажем сформулированное утверждение. Для этого рассмотрим выражение

$$\Theta = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (F - y'F'_{y'})dx + F'_{y'}dy. \tag{20}$$

Выберем путь интегрирования из точки (x_0, y_0) вдоль экстремали, а затем - вдоль трансверсали, которая содержит точку (x, y). Отметим, что на трансверсали подынтегральное выражение обращается в ноль. На экстремали, принимая во внимание равенство $y'dx = dy$, получам

$$(F - y'F'_{y'})dx + F'_{y'}dy = Fdx - F'_{y'}dy + F'_{y'}dy = Fdx.$$

Таким образом,

$$\Theta = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(\tilde{x},\tilde{y})} F(x, y, u(x, y))dx. \tag{21}$$

Здесь точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит на пересечении экстремали, содержащей точку (x_0, y_0), и трансверсали, содержащей точку (x, y). Утверждение 2 доказано. ■

Сформулируем

Утверждение 3:
Интеграл

$$\int_A^B F(x, y, u(x, y))dx, \tag{22}$$

взятый вдоль части экстремали, заключенной между двумя трансверсалями, не зависит от выбора экстремали. Доказательство этого Утверждения следует из приведенных выше рассуждений. ■