Уравнение Эйлера в канонической формулировке. Уравнения Гамильтона-Якоби. Лекция 22 апреля.

24 апреля 2020 г.

1 Уравнение Эйлера в канонической формулировке.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Уравнение Эйлера, решение которого определит семейство экстремалей функционала (1), является дифференциальным уравнением второго порядка:

$$F_y^{'} - \frac{d}{dx}F_{y'}^{'} = 0. \tag{2}$$

Постараемся перестроить уравнение (2) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Этот шаг является весьма существенным, поскольку позволит понизить порядок исходного дифференциального уравнения, и, тем самым, облегчить подходы к его решению. Особенно существенным этот шаг оказывается в случае системы многих переменных.

В простейшем случае функция Лагланжа $F(x, y, y')$ есть функция трех переменных x, y и y'. Перейдем от пары переменных (y, y') к новой паре переменных (y, p), где новая переменная p определяется следующим образом

$$p = F_{y'}^{'}(x, y, y'). \tag{3}$$

Пусть $F_{y'y'}^{''} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции можно выразить из уравнения (3) y' как функцию x, y и p:

$$y' = y'(x, y, p).$$

Введем функцию Гамильтона следующим образом:

$$H(x, y, p) = (-F + y'F_{y'}^{'})|_{y'=y'(x,y,p)} \tag{4}$$

При этом

$$-\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\Big(F(x, y, y'(x, y, p)) - y'F_{y'}^{'}(x, y, y'(x, y, p))\Big) = \tag{5}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial p} - \frac{\partial y'}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial p}{\partial p} = -\frac{dy}{dx}.$$

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(F(x, y, y'(x, y, p)) - y'(x, y, p)F_{y'}^{'}(x, y, y'(x, y, p))\Big) = \tag{6}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{dp}{dx}.$$

Мы воспользовались здесь тем, что рассматриваем переменные p и y как независимые. Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

В последнем равенстве мы воспользовались также уравнением Эйлера (2) явно, что и означает фактически, что полученная система уравнений (5)-(6) порождена именно уравнением (2). Мы, таким образом, приходим к следующему виду уравнений (5)-(6):

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{8}$$

Систему уравнений (7)-(8) называют **уравнением Эйлера в канонической форме.**

Как мы уже отмечали выше, мы смогли перейти от уравнения Эйлера вида (2), дифференциального уравнения второго порядка, к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. Это, вследствие понижения порядка исходного уравнения, является весьма существенным.

2 Уравнение Гамильтона-Якоби.

Вспомним сейчас результаты предыдущей лекции, где было рассмотрено уравнение в полных дифференциалах

$$d\Theta(x,y) = 0. \tag{9}$$

При этом было показано, что

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = F^{'}_{y'} = p, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x} = F - y'F^{'}_{y'} = -H(x,y,p).$$

Полученные результаты дают нам возможность сформулировать в терминах, определенных в выражениях (3), (4), следующее уравнение:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -H\left(x, y, \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Уравнение (10) носит название **уравнения Гамильтона-Якоби.**

Рассмотрим следующий пример, демонстрирующий некоторые возможности описанного выше формализма.

Пример 1:

Рассмотрим **функционал Ферма**:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{n(x,y)} dx. \tag{11}$$

Здесь $n(x,y)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Функция Лагранжа в данной задаче имеет вид

$$F = \sqrt{1+y'^2}\frac{1}{n(x,y)}.$$

Введем согласно уравнению (4) функцию Гамильтона:

$$-H = F - y'F^{'}_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{n(x,y)} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{n(x,y)} = \frac{1}{n(x,y)}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{12}$$

Согласно определению (3) введем переменную p:

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{n(x,y)\sqrt{1+y'^2}}. \tag{13}$$

Выразим y' из уравнения (13)

$$y'^2 = \frac{p^2 n^2(x,y)}{1 - p^2 n^2(x,y)}. \tag{14}$$

В терминах (14) запишем теперь функцию Гамильтона (12)

$$H(x,y,p) = -\frac{1}{n(x,y)}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2n^2(x,y)}{1-p^2n^2(x,y)}}} = -\frac{\sqrt{1-p^2n^2(x,y)}}{n(x,y)}. \tag{15}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (10) теперь принимает вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{1}{n(x,y)}\sqrt{1 - n^2(x,y)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2}. \tag{16}$$

Сформулируем теперь **уравнение эйконала,** уравнение в частных производных, которое можно рассматривать как **квазиклассическое приближение волнового уравнения**:

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{n^2(x,y)}. \tag{17}$$

Свяжем полученное уравнение с рассмотренным выше примером распространения света в оптически неоднородной среде. Его решение, как будет показано в следующем примере, определит квазиклассические траектории распространения луча света.

3 Теорема Гамильтона-Якоби.

Пусть функция Лагранжа $F(x, y, y')$ удовлетворяет условию $F''_{y'y'} \neq 0$. Пусть мы нашли полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Theta = \Theta(x, y, \alpha), \tag{18}$$

где α – некоторая константа, которая возникает при решении уравнения в частных производных (10). Тогда можно восстановить общий интеграл уравнения Эйлера. Сформулируем следующую теорему.

Теорема Гамильтона-Якоби:
Общим интегралом уравнения Эйлера является величина

$$\Upsilon = \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}. \tag{19}$$

Доказательство Теоремы проведем следующим образом.

Пусть $u(x, y, \alpha)$ – наклон поля. Наклон поля, как было определено выше, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = u(x, y, \alpha). \tag{20}$$

Мы рассматриваем зависимость наклона поля от параметра α в следующем смысле. Поскольку уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка, его решение y, вообще говоря, зависит от двух постоянных. Уравнение (20), являющееся определением наклона поля – дифференциальное уравнением первого порядка. Его решение ищется с точностью до одной постоянной. Таким образом, наклон поля u, вообще говоря, зависит от одного свободного параметра.

В терминах наклона поля

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = F(x, y, u) - uF'_{y'}(x, y, u), \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = F'_{y'}(x, y, u). \tag{22}$$

Дифференцируем уравнения (21)-(22) по параметру α:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial F}{\partial y'} - u\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial \alpha} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{24}$$

Теперь проверим, что величина $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}$ является постоянной:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial \alpha}\frac{dy}{dx}. \tag{25}$$

Подставляя уравнения (23)-(24) в (25), получаем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right) = -u\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{dy}{dx} - u\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{26}$$

В последнем равенстве мы воспользовались обращением круглой скобки в ноль вследствие уравнения (20). Теорема Гамильтона-Якоби доказана. ■

Пример 2.

Найдем семейство экстремалей функционала Ферма следующего вида

$$J[y] = \int \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{27}$$

Отметим, что попытка нахождения экстремалей функционала (27) путем непосредственного решения уравнения Эйлера не приводит к простому решению:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y - xy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}} - y''\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0$$

Мы приходим к некоторому нелинейному уравнению следующего вида:

$$(y - xy')(1 + {y'}^2) = y''(x^2 + y^2).$$

Попробуем искать решение задачи, воспользовавшись теоремой Гамильтона-Якоби. Согласно уравнению (3) определим переменную p:

$$p = F^{'}_{y'} = \frac{y'\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + {y'}^2}}.$$

Отсюда находим y'

$${y'}^2 = \frac{p^2}{x^2 + y^2 - p^2}$$

и определим функцию Гамильтона согласно уравнению (4)

$$H(x, y, p) = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

В этих терминах уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2} = 0. \tag{28}$$

Отсюда следует уравнение эйконала:

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2. \tag{29}$$

В уравнении (29) поделим переменные

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 - x^2 = y^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = C \tag{30}$$

и будем искать такие решения уравнения (30) (если они есть), для которых C является константой.

В этом случае из уравнения (30) получаем

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \sqrt{C + x^2},$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \sqrt{y^2 - C}.$$

Теперь можно восстановить Θ как интеграл от полного дифференциала по контуру в плоскости XY. Выберем в качестве контура ломаную из двух звеньев, каждое из которых параллельно "своей"координатной оси:

$$\Theta = \int \sqrt{C + x^2}dx + \int \sqrt{y^2 - C}dy + \gamma. \tag{31}$$

Воспользуемся Теоремой Гамильтона-Якоби:

$$C_1 = \frac{\partial\Theta}{\partial C} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{C + x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C}} = \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + C}) - \frac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2 - C}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + C}}{y + \sqrt{y^2 - C}}\right).$$

Окончательно, уравнение поля экстремалей (не явное) имеет вид:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + C}}{y + \sqrt{y^2 - C}} = C_2. \tag{33}$$

Зафиксировать постоянные C, C_2 можно, воспользовавшись условиями прохождения светового луча через некоторую пару точек на плоскости XY.

Отметим, что интегралы в уравнении (32) нетрудно взять с помощью замен переменных

$$x = \sqrt{C}\sinh t, \qquad y = \sqrt{C}\cosh t.$$

3.1 Теорема Гамильтона-Якоби для функционала, зависящего от нескольких функций.

Сформулируем теорему Гамильтона-Якоби для функционала, зависящего от нескольких функций.

Рассмотрим функционал

$$J[\vec{Y}] = \int F(x, \vec{Y}, \vec{Y}')dx,$$

где

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Предположим, что определитель Якоби

$$\frac{D(F'_{y_1'}, F'_{y_2'}, \dots, F'_{y_n'})}{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}$$

отличен от нуля.

Определим вектор $\vec{P}$ следующим образом:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{34}$$

Обратим систему уравнений (34):

$$y_i' = y_i'(x, \vec{Y}, \vec{P}).$$

Наконец, введем функцию Гамильтона следующим образом

$$H(x, \vec{Y}, \vec{P}) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'} - F \right) |_{y_i' = y_i'(x, \vec{Y}, \vec{P})}.$$

В этом случае уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial \Theta}{\partial y_1}, \frac{\partial \Theta}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial \Theta}{\partial y_n}\right) = 0,$$

а его полный интеграл зависящий от $n+1$ переменной:

$$\Theta(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \gamma.$$

Тогда:

Утверждение:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

- полный набор первых интегралов уравнения Эйлера.