Преобразование Фурье (продолжение). Лекция 24 марта.

24 марта 2020 г.

1 Равенство Парсеваля.

Будем рассматривать абсолютно интегрируемую на $\mathbb{R}$ функцию $f(x)$, предполагая также, что $f \in C^1(\mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируема на оси). Условие гладкости функции ведет, как мы видели из предыдущей лекции, к быстрому убыванию ее преобразования Фурье.

Выделим на оси промежуток $(-l, l)$ и разложим функцию $f(x)$ на этом промежутке в ряд Фурье по $2l$-периодическим функциям:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(f) e^{i\frac{\pi n x}{l}}, \quad x \in (-l, l). \tag{1}$$

Запишем для функции $f(x)$, заданной на промежутке $(-l, l)$, равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{\pi n x}{l}} dx \right|^2. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}.$$

В терминах этих обозначений равенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-N}^{N} \left| \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \Delta\lambda_n + \sigma_N(\lambda). \tag{3}$$

В выражении (3) мы ввели обозначение

$$\sigma_N(\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \left| \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \Delta\lambda_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \Delta\lambda_n. \tag{4}$$

Параметр N мы выбираем таким образом, что $\lambda_N = \frac{\pi N}{l} = l$. Или, иначе говоря, $N = \left[\frac{l^2}{\pi}\right]$. Здесь $[*]$ обозначает целую часть выражения.

Устремим в выражении (3) параметр l к бесконечности. Пользуясь обозначением, введенным ранее для Фурье-преобразования

$$\hat{f}(\lambda) \equiv F[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}$$

и помня, что дискретный параметр λ_n переходит при $l \to \infty$ в непрерывный параметр λ, а сумма по дискретному параметру n переходит в интеграл по $d\lambda$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda. \tag{5}$$

Мы учли также, что $\sigma_N(\lambda) \to 0$ при $l \to \infty$ поскольку Фурье-преобразование гладкой функции (по предположению $f \in C^1(\mathbb{R})$) быстро убывает на бесконечности. Полученное выражение (5) называется **равенством Парсеваля**. В терминах скалярных произвелений в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых на оси функций равенство (5) может быть записано в виде

$$\langle f, f \rangle = \langle F[f], F[f] \rangle. \tag{6}$$

2 Приложения Фурье-преобразования

Мы рассмотрим теперь несколько задач, решение которых основано на методах Фурье-преобразования.

2.1 Интегральные уравнения на оси.

Найти решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(x) dx = \frac{\sin\lambda}{\lambda} \tag{7}$$

в классе квадратично интегрируемых функций.

Решение.

Отметим, что левая часть уравнения (7) представляет собой Фурье-преобразование функции g. Таким образом, уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\sqrt{2\pi} F[g](\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{(-1,1)}(x) = \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Мы ссылаемся здесь на пример, разобранный в предыдущей лекции.

2.2 Решение дифференциальных уравнений.

Найти убывающее на бесконечности решение уравнения

$$y'' - y = e^{-\alpha|x|} \tag{8}$$

Решение.

Применим Фурье-преобразование к левой и правой части уравнения (8)

$$((i\lambda)^2 - 1)\hat{y}(\lambda) = F\left[e^{-\alpha|x|}\right].$$

Таким образом, выражение для $\hat{y}(\lambda)$ принимает вид

$$\hat{y}(\lambda) = -\frac{F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda)}{\lambda^2+1}.$$

Наконец,

$$y(x) = -F^{-1}\left[\frac{1}{\lambda^2+1} F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda)\right](x). \tag{9}$$

Отметим, что выражение в квадратных скобках может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda^2+1} F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F[e^{-|x|}](\lambda) F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F[f*g](\lambda).$$

Мы ввели обозначения

$$f(x) \equiv e^{-|x|}, \qquad g(x) \equiv e^{-\alpha|x|}. \tag{10}$$

Мы воспользовались также доказанным ранее свойством свертки квадратично интегрируемых функций:

$$F[f*g] = F[f]F[g].$$

Возвращаясь к уравнению (9), получаем

$$y(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(f*g)(x), \tag{11}$$

где функции f и g определены в уравнении (10). Окончательно, мы приходим к следующему результату:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-|t|} e^{-\alpha|x-t|}. \tag{12}$$

Самостоятельно показать, что
1) при $\alpha \neq 1$

$$y(x) = \frac{1}{\alpha^2 - 1}\left(e^{-\alpha|x|} - \alpha e^{-|x|}\right).$$

2) при $\alpha = 1$

$$y(x) = -\frac{1}{2}(|x|+1)e^{-|x|}.$$

2.3 Решение уравнений в свертках.

Найти убывающее на бесконечности решение уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-\alpha|x-t|}dt = \frac{x}{x^2+\beta^2}. \tag{13}$$

Решение.
Введем обозначения

$$f(x) \equiv e^{-\alpha|x|}, \qquad g(x) \equiv \frac{x}{x^2+\beta^2}.$$

Тогда в этих обозначениях уравнение (13) принимает вид

$$\sqrt{2\pi}(y * f)(x) = g(x). \tag{14}$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (14) Фурье-преобразование, получаем

$$\sqrt{2\pi}\hat{y}(\lambda)\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda). \tag{15}$$

Получилось алгебраическое уравнение относительно функции $\hat{y}$

$$\hat{y}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\hat{g}(\lambda)}{\hat{f}(\lambda)}. \tag{16}$$

2.3.1 Вычисление функции $\hat{g}(\lambda)$

$$\hat{g}(\lambda) = F\left[\frac{x}{\beta^2+x^2}\right](\lambda) = iF'\left[\frac{1}{\beta^2+x^2}\right](\lambda) = \frac{i}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\lambda}\left\{F^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+x^2}\right](-\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{i}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\lambda}e^{-\beta|\lambda|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{ll} -ie^{-\beta\lambda}, & \lambda > 0 \\ ie^{\beta\lambda}, & \lambda < 0. \end{array}\right.$$

2.3.2 Вычисление функции $\hat{f}(\lambda)$

$$\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) = F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Возвращаясь к уравнению (16), получаем окончательно

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\alpha^2+\lambda^2)\frac{i}{\beta}\frac{d}{d\lambda}e^{-\beta|\lambda|}\right](x). \tag{17}$$

Полученное выражение может быть посчитано явно.