Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Лекция 28 апреля.

30 апреля 2020 г.

1 Основные понятия.

Пусть существует функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

Тогда функция $y = f(x)$ из класса допустимых функций доставляет максимум функционалу, если

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \eta, y' + \eta')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx < 0,$$

здесь пробная функция $\eta \in C^1_{[x_0,x_1]}, \quad \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$

Пусть существует поле экстремалей $y = y(x, \alpha)$, решение уравнения

$$y' = u(x, y).$$

Здесь $u(x, y)$ – наклон поля, $f(x) = y(x, 0)$.

Тогда, как мы показали ранее, выражение

$$Q \equiv \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \Big[F(x, y, u) - uF'_{y'}(x, y, u)\Big]\, dx + F'_{y'}(x, y, u)dy \tag{1}$$

не зависит от пути. Отметим еще раз, что если интегрирование ведется вдоль экстремали, то $dy = udx$. В этом случае выражение (1) существенно упрощается

$$Q = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F(x, y, u)dx = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F(x, y, y')dx. \tag{2}$$

Предположим теперь, что точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) принадлежат некоторой экстремали. Рассмотрим выражение

$$\Delta J[y] = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F(x, y, y')dx - \left\{ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \Big(F(x, y, u)dx - uF'_{y'}(x, y, u)\Big)\, dx + F'_{y'}(x, y, u)dy \right\}. \tag{3}$$

Отметим, что мы интегрируем по произвольному контуру, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). При этом выражение в фигурных скобках, как не зависящее от траектории, равно значению интеграла (2) вдоль экстремали $y = f(x)$.

Сделав подстановку $dy = y'dx$ в фигурных скобках, запишем выражение (3) следующим образом:

$$\Delta J[y] = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \Big(F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u)F'_{y'}(x, y, u)\Big)\, dx.$$

Введем обозначение

$$E(x, y, v, u) \equiv F(x, y, v) - F(x, y, u) - (v - u)F'_{y'}(x, y, u). \tag{4}$$

Функция $E(x, y, v, u)$ называтся **функцией Вейерштрасса.**

1.1 Достаточное условие экстремума по Вейерштрассу.

1) Пусть существует поле $y = y(x, \alpha)$, окружающее данную экстремаль.

2) Пусть в любой точке поля и для любого конечного $y' \neq u$ выполнено неравенство

$$E(x, y, y', u) < 0.$$

Тогда данная экстремаль доставляет максимум функционалу.

Разложим функцию Лагранжа $F(x, y, y')$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $y' = u$:

$$F(x, y, y') = F(x, y, u) + (y' - u)F'_{y'}(x, y, u) + \frac{1}{2}(y' - u)^2 F''_{y'y'}\left(x, y, u + \theta(y' - u)\right).$$

Мы оборвали ряд на третьем члене разложения, компенсировав оставшиуюся часть ряда за счет сдвига с некоторым параметром θ третьего аргумента функции Лагранжа в последнем сохраненном члене.

Тогда из уравнения (4) следует, что

$$E(x, y, y', u) = \frac{1}{2}(y' - u)^2 F''_{y'y'}\left(x, y, u + \theta(y' - u)\right).$$

Сформулируем **Достаточное условие Лежандра.**

1.2 Достаточное условие экстремума по Лежандру.

1) Пусть существует поле $y = y(x, \alpha)$, окружающее данную экстремаль.

2) Пусть в любой точке поля (x, y) справедливо неравенство

$$F''_{y'y'}(x, y, \zeta) < 0$$

для любого значения третьего аргумента функции Лагранжа ζ.

Тогда данная экстремаль доставляет максимум функционалу.

1.3 Пример 1.

Рассмотрим функционал Ферма

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx n(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

где $n(x, y)$ положительно определенная функция на всей области определения $(x, y) \in D$. Нетрудно видеть, что $F''_{y'y'}$ удовлетворяет оценке

$$F''_{y'y'} = \frac{n(x, y)}{(1 + y'^2)^{3/2}} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Таким образом, согласно достаточному условию экстремума (по Лежандру), любая экстремаль функционала Ферма доставляет функционалу минимум.

1.4 Пример 2.

Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 (1 + y')^2 dx. \tag{5}$$

Поскольку функция Лагранжа $F = y'^2(1 + y')^2$ не зависит от y, воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера

$$F'_{y'} = 2y'(1 + y')(1 + 2y') = C.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y' = m, \tag{6}$$

$$y = mx + n. \tag{7}$$

Зафиксируем одну из констант n с помощью граничных условий и, тем самым, получим семейство экстремалей, которое определяется уравнением (6).

Вычислим теперь функцию Вейерштрасса $E(x, y, y', u)$ (4), полагая $u(x, y) = m$:

$$E(x, y, y', u)|_{u=m} = (y' - m)^2 \left[(y' + m + 1)^2 + 2(1 + m)m\right]. \tag{8}$$

Очевидно, что в случае, когда выполняется соотношение

$$m(m+1) > 0$$

функция Вейерштрасса является положительно определенной и, тем самым, при

$$m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \tag{9}$$

семейство экстремалей доставляет функционалу (5) минимум.

Если же выполняется дополнительное к условию (9) предположение

$$m \in (-1, 0), \tag{10}$$

то возникает условие, связывающее y' и m. Это означает, что экстремали, которые характеризуются параметром m, удовлетворяющим условию (10), порождают **слабый минимум** или **слабый максимум**, то есть **минимум или максимум, при наложении дополнительного условия на производную** y'.

Напомним, что *функция* $y(x)$ дает абсолютный экстремум функционалу $J[y]$, если $\Delta J[h] = J[y+h] - J[y]$ сохраняет знак на всем классе допустимых кривых. Если $\Delta J[h]$ сохраняет знак на части класса допустимых кривых, удовлетворяющих условию $||h|| = sup|h| < \varepsilon$, то экстремум называется сильным. Если $\Delta J[h]$ сохраняет знак на части класса допустимых кривых, для которых $||h||_1 = sup|h| + sup|h'| < \varepsilon$, то экстремум называется слабым.

Определим какого типа будет это дополнительное условие. Для этого мы должны определить знак выражения в квадратных скобках в уравнении (8). Нули этого выражения определяются уравнением

$$y'^2 + 2y'(m+1) + 3m^2 + 4m + 1 = 0$$

В свою очередь, корни этого квадратного уравнения при условии (10) имеют вид

$$y'_{1,2} = |m| - 1 \mp \sqrt{2|m|(1-|m|)}. \tag{11}$$

Таким образом, мы приходим к следующему заключению. В случае, когда семейство экстремалей функционала (5) определяется условием (10), при наличии дополнительного условия

$$y' \in (-\infty, y'_1) \cup (y'_2, +\infty) \tag{12}$$

функция Вейерштрасса является положительно определенной. Тем самым, возникает **слабый минимум**.

При наличии дополнительного условия

$$y' \in (y'_1, y'_2) \tag{13}$$

функция Вейерштрасса является отрицательно определенной. Тем самым, возникает **слабый максимум**.

Параметры y'_1 и y'_2 определяются уравнением (11).