Вариационное исчисление. Лекция 31 марта.

31 марта 2020 г.

1 Обобщения основной леммы вариационного исчисления

Обобщение 1. Производные высших порядков. Предположим, что в условии основной Леммы равенство нулю интеграла выполняется только для n-раз непрерывно дифференцируемых функций η. Тогда утверждение Леммы остается в силе.

Для доказательства берем функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} \left((x-C)^2 - \delta^2\right)^{2n}, & |x-C| \leq \delta \\ 0, & |x-C| > \delta \end{cases}$$

Обобщение 2. Основная Лемма вариационного исчисления для функции нескольких переменных.

Пусть функция g непрерывна в области $g \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Пусть для всех непрерывно дифференцируемых функций η, равных нулю на границе области D, верно равенство

$$\int_D g(x)\eta(x)dx = 0, \quad \text{тогда} \quad g(x) \equiv 0. \tag{1}$$

Доказательство (аналогично основной Лемме):

Пусть $g \neq 0$ в точке M_0; так как g непрерывна, то $g > 0$ в некотором шаре $B_\delta(M_0)$.

Рассмотрим функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} (|x-M_0|^2 - \delta^2)^2, & x \in B_\delta(M_0) \\ 0, & x \in D \backslash B_\delta(M_0). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_D g(x)\eta(x)dx > 0,$$

то есть мы пришли к противоречию. ■

2 Уравнение Эйлера.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \tag{2}$$

и набор краевых условий

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1. \end{cases} \tag{3}$$

Задача заключается в отыскании функции $y(x)$, доставляющей экстремум функционалу (2) и удовлетворяющей краевым условиям (3).

Рассмотрим пробную непрерывно дифференцируемую функцию $\eta(x)$, такую, что

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0.$$

Введем функцию $f(t) = J[y + t\eta]$. Тогда условие

$$\frac{df(t)}{dt}|_{t=0} = 0 - -$$

необходимое условие экстремума. Это означает следующее:

$$\frac{df(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+t\eta, y'+t\eta')dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx = \tag{4}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)dx = 0.$$

Мы воспользовались здесь условиями $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, вследствие чего внеинтегральный член оказался равен нулю. Тогда необходимое условие экстремума в виде (4) согласно основной Лемме принимает вид.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется уравнением Эйлера. Его решения $y(x)$ называются экстремалями функционала (2).

3 Частные случаи уравнения Эйлера.

3.1 Выражение F не зависит от y.

Пусть выражение F не зависит от y, то есть $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Из уравнеия (5) в этом случае следует, что $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C, \tag{6}$$

где C – произвольная константа. Выражение (6) определяет первый интеграл уравнеия (5), то есть величину, сохраняющую свое значение вдоль интегральной кривой $y(x)$.

3.2 Выражение F не зависит от x.

Пусть выражение F не зависит от x, то есть

$$F = F(y, y'). \tag{7}$$

Перепишем уравнение Эйлера (5) с учетом специфики данного случая (7):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' = 0. \tag{8}$$

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае $F = F(y, y')$ первым интегралом уравнения (5) является величина

$$L \equiv F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Для доказательства рассмотрим

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}y' - y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''.$$

Приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right). \tag{9}$$

Сравнивая выражение в круглых скобках и уравнение (8), приходим к выводу

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

Это означает, что

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C, \tag{10}$$

где C – некоторая, вообще говоря, произвольная константа.

3.3 Выражение F не зависит от y'

Если выражение F не зависит от y', то $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ и, как следует из уравнения Эйлера (5),

$$\frac{\partial F(x, y}{\partial y} = 0.$$

Таким образом,

$$F = F(x).$$

Следовательно, вариационная задача не имеет решений.

4 Примеры.

4.1 материальная точка в поле U

Рассмотрим функционал действия

$$S[y] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, y, y')dt,$$

где

$$\mathcal{L}(t, y, y') = \frac{my'^2}{2} - U(t, y) \tag{11}$$

функция Лагранжа материальной точки в поле U. Здесь переменная t обозначает время, $y(t)$ – зависимость координаты материальной точки от времени.

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0,$$

записанное для случая (11), принимает вид

$$-\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dt}my' = 0. \tag{12}$$

Иначе говоря, из уравнения (12) получаем второй закон Ньютона:

$$my'' = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

4.2 Поле U не заисит от времени t.

Пусть поле U не зависит от времени t. Тогда $\mathcal{L}$ не зависит от t. В этом случае первый интеграл (10) принимает следующий вид

$$\mathcal{L} - y'\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{my'^2}{2} - U(y) - y'(my') = -\left(\frac{my'^2}{2} + U(y)\right) = Const. \tag{13}$$

Уравнение (13) принимает вид закона сохранения энергии.

4.3 Поле U не заисит от координаты y.

Пусть поле U не зависит от координаты y. Тогда первый интеграл (6) принимает следующий вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = my' = Const. \tag{14}$$

Мы пришли к закону сохранения импулья.