Лекция 10

ВОПРОС: Как мы уже видели для уравнения

$$zw'' + (p_0 z + p_1)w' + (q_0 z + q_1)w = 0$$

один из показателей в окрестности точки $z = 0$ является нулевым. Т.е. у нас должно быть голоморфное в окрестности точки ноль решение. Для какого контура возникает это голоморфное решение?

Голоморфное решение получается из нашего интеграла

$$w(z) = \int_\gamma e^{zt}(t-\alpha_1)^{\rho_1 - 1}(t-\alpha_2)^{\rho_2 - 1} dt.$$

если разложить экспоненту e^{zt} в ряд Тейлора и поменять местами ряд и интеграл. Контур для такого решения не может быть неограниченным. Поскольку на неограниченном контуре ряд сходится неравномерно. Ограниченный контур можно устроить в виде так называемой двойной восьмерки: обход в положительном направлении вокруг точки α_1 + обход в положительном направлении вокруг точки α_2 +обход в отрицательном направлении вокруг точки α_1 + обход в отрицательном направлении вокруг точки α_2 . При аналитическом продолжении по такому замкнутому контуру веточка подынтегральной функции, в итоге, не изменяется. Таким образом, подстановка будет нулевой.

ВОПРОС: найти интегральные представления для решений нашего уравнения в случае кратного корня $\alpha_1 = \alpha_2$

В этом случае, мы получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{f'}{f} = \frac{-2t - p_0 + p_1 t + q_1}{(t-\alpha)^2}$$

из которого можно найти функцию f.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нам удалось получить асимптотику решений уравнения

$$zw'' + (p_0 z + p_1)w' + (q_0 z + q_1)w = 0$$

с помощью метода перевала. Ответ получился при $\mathrm{Re} z > 0$. С другой стороны у нас есть теорема о неправильной особой точке из лекции 8 и она действует в этом случае. В соответствии с этой теоремой у нас есть асимптотические решения в секторах разделенных прямой

$$\mathrm{Re} z\alpha_1 = \mathrm{Re} z\alpha_2$$

Допустим, что эта прямая отлична от вещественной оси. Тогда асимптотики, которые мы построили можно распространить с правой полуплоскости практически на всю комплексную плоскость (вне заштрихованного сектора будет работать наша асимптотика см.рис.)

1 Уравнение Бесселя. Функция Бесселя

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$$

Это уравнение имеет две особые точки. Точка $z = 0$ - правильная особая точка и точка $z = \infty$ -неправильная особая точка. Показатели для правильной особой точки $z = 0$ равны $\pm\nu$. В окрестности точки $z = 0$ можно построить решение в виде ряда

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Это было одной из задач домашнего задания. Я не буду повторять эти выкладки. Функция J_ν носит название функции Бесселя.

Опишем свойства функции Бесселя.

1) Набор функций $\{J_\nu,\, J_{-\nu}\}$ для нецелого ν является базисом решений уравнения Бесселя. Тоже было на семинарах.

2) Если $\nu = n$ -целое, то

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

Доказательство этого факта получается из определения функции Бесселя. Пусть $n > 0$ -целое

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

При $n-k > 0$ имеем $\frac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0$. Таким образом, несколько первых членов нашего ряда равны нулю. Сделаем замену индекса в сумме $m = k-n$, тогда

$$J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(z)$$

3) Функции Бесселя удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = z^{\nu-1} J_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_\nu(z) = -z^{-\nu-1} J_{\nu+1}(z)$$

Доказательство этих двух формул аналогично. Посмотрим на первую из них

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = \frac{1}{z}\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \frac{z^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}} =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\nu+2n)}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\frac{z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}} =$$

$$= z^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu)}\frac{z^{2n+\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}} = z^{\nu-1}J_{\nu-1}(z)$$

4) Для полуцелого значка $\nu = n + 1/2$ функция Бесселя является элементарной функцией

Доказательство. Рассмотрим функцию Бесселя со значком $\frac{1}{2}$

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1/2}$$

С учетом формулы удвоения для гамма-функции

$$\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{2^{2z-1}\Gamma(z)}$$

т.е.

$$\Gamma(n+3/2) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2(n+1))}{2^{2(n+1)-1}\Gamma(n+1)}$$

Следовательно,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2(n+1)-1}\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2(n+1))}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

Таким образом $J_{\frac{1}{2}}(z)$ является элементарной функцией. Для других функций с полуцелым значком это свойство вытекает из рекуррентных соотношений

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z^{\nu}J_{\nu}(z) = z^{\nu-1}J_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z^{-\nu}J_{\nu}(z) = -z^{-\nu-1}J_{\nu+1}(z)$$

2 Функции Ханкеля

Уравнение Бесселя попадает в тот класс, для которого применим метод Лапласа для построения интегрального представления. Мы рассматривали такой класса на предыдущей лекции:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

со следующими свойствами:

Уравнение имеет две особые точки. Правильную особую точку $z = 0$ и неправильную особую точку $z = \infty$. При этом функции p и q в окрестности бесконечности разлагаются в ряды

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty}p_k z^{-k}$$

$$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k}$$

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$zw'' + (p_0 z + p_1)w' + (q_0 z + q_1)w = 0$$

Для начала сделаем замену

$$w(z) = z^{\nu} v(z)$$

Тогда

$$zv'' + (2\nu + 1)v + zv = 0$$

Ищем $v(z)$ в виде

$$v(z) = \int_{\gamma} e^{zt} f(t) dt$$

Получаем уравнение для $f(t)$

$$-(ft^2)' + (2\nu + 1)tf - zf' = 0$$

Следовательно,

$$f = (t^2 + 1)^{\frac{2\nu - 1}{2}}$$

и соотношение на подстановку

$$e^{zt}(t^2 + 1)^{\frac{2\nu+1}{2}}|_{\gamma} = 0.$$

Будем считать, что $\mathrm{Re}z > 0$. Тогда можно выбрать контуры следующим образом:

Проведем разрез от точки $t = i$ до $t = -\infty + i$. Тогда γ_1 -контур вокруг разреза (для определенности в положительном направлении). Аналогично можно провести от точки $t = -i$ до $t = -\infty - i$. Тогда γ_2 -контур вокруг разреза.

Таким образом, у нас получаются два решения

$$w_{1,2}(z) = z^{\nu} \int_{\gamma_{1,2}} e^{zt}(t^2 + 1)^{\frac{2\nu-1}{2}} dt$$

Зафиксируем веточки многозначных функций $(t - i)^{\frac{2\nu-1}{2}}$ и $(t + i)^{\frac{2\nu-1}{2}}$ следующим образом. Проведем для этих функций разрезы от точки $t = i$ до $t = -\infty + i$ и от точки $t = -i$ до $t = -\infty - i$ соответственно и будем считать что логарифмы на продолжении этих разрезов в положительную сторону сторону вещественны.

Посмотрим на их асимптотику при $|z| \to \infty$ ($\mathrm{Re}z > 0$). Действуем также как и в одном из предыдущих параграфов.

Сделаем замену

$$\tau = t - i$$

Тогда

$$w_1(z) = z^\nu e^{iz} \int_{\gamma_0} e^{z\tau} \tau^{\frac{2\nu-1}{2}} (\tau + 2i)^{\frac{2\nu-1}{2}} d\tau.$$

(γ_0 - контур вокруг отрицательной полуоси)

Из метода перевала легко видеть, что асимптотика нашего интеграла формируется в окрестности точки $\tau = 0$ и с экспоненциальной точностью можно обрезать наш контур в окрестности $\tau = -1$ и оставить только его кусочек $\widetilde{\gamma}_0$ в окрестности нуля. На этом контуре можно разложить функцию

$$(\tau + 2i)^{\frac{2\nu-1}{2}}$$

в ряд Тейлора

$$(\tau + 2i)^{\frac{2\nu-1}{2}} = 2^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^k$$

Поскольку ряд сходится на нашем "обрезанном"контуре равномерно, то его можно поменять местами с интегралом

$$w_1(z) \sim z^\nu e^{iz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\widetilde{\gamma}_0} e^{z\tau} \tau^{k+\frac{2\nu-1}{2}} \tau, \quad c_0 = 2^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}}$$

Далее можно вновь вернуться к интегралу по контуру γ_0 и при этом опять с экспоненциальной точностью

$$w_1(z) \sim z^\nu e^{iz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\gamma_0} e^{z\tau} \tau^{k+\frac{2\nu-1}{2}} \tau.$$

Сделаем замену

$$s = \tau z$$

Тогда

$$w_1(z) \sim z^\nu e^{iz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\frac{2\nu+1}{2}} \int_{\gamma_0} e^s s^{k+\frac{2\nu-1}{2}} ds.$$

Таким образом, получаем асимптотическое разложение

$$w_1(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} e^{iz} (2^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{2\nu-1}{2}} \frac{2\pi i}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{2\pi i}{\Gamma(1-k-\frac{2\nu+1}{2})} z^{-k})$$

По определению функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}$ фиксируется как решение уравнения Бесселя с асимптотикой $|z| \to \infty$ ($\mathrm{Re} z > 0$)

$$H_\nu^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$

Видно, что функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}$ и решение $w_1(z)$ пропорциональны. Аналогично вводится вторая функция Ханкеля: $H_\nu^{(2)}$ фиксируется как решение уравнения Бесселя с асимптотикой $|z| \to \infty$ ($\mathrm{Re} z > 0$)

$$H_\nu^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{\pi}{4}(2\nu+1))}$$