1 Лекция 2 - Теорема Фукса

В прошлый раз мы остановились на том, что увидели, что наши рассуждения относительно особых точек могут быть применены к случаю скалярного уравнения второго порядка

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0. \tag{1}$$

Значительная часть специальных функций отвечает этому уравнению.

Прежде всего введем понятие правильной особой точки $z = c$. Мы будем называть изолированную особую точку коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ правильной особой точкой, если в окрестности этой точки уравнение (1) имеет два решения вида

$$w_1(z) = (z-c)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$w_2(z) = (z-c)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-c)^k, \quad d_0 \neq 0$$

В случае, если матрица монодромии имеет присоединенный вектор, второе решение будет с логарифмом

$$w_2(z) = \ln(z-c) w_1(z) + (z-c)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-c)^k, \quad d_0 \neq 0$$

Заметьте, что мы требуем отличия от нуля коэффициентов c_0 и d_0. Дело в том, что условие на выбор показателей ρ_1, ρ_2

$$\exp(2\pi i \rho_{1,2}) = \lambda_{1,2},$$

которое мы получили в предыдущем параграфе не фиксировало их однозначно (мы всегда могли добавить произвольное целое число). Теперь же соотношения для правильной особой точки фиксируют их полностью.

Точки,для которых нет таких двух решений называются неправильными. Другими словами, правильная особая точка отличается от неправильной тем, что в окрестности правильной особой точки мы имеем решения представляющиеся ОДНОСТОРОННИМИ рядами. Как мы знаем еще из комплексного анализа эффективное использование двухсторонних рядов не получается. Поэтому (забегая вперед) в дальнейшем для неправильной особой точки мы откажемся от сходящегося ряда Лорана в пользу некоторого асимптотического ряда. Таким образом, случай правильной и неправильной особой точки будет отличаться принципиально: для правильной особой точки мы работаем со сходящимися рядами Тейлора, а для неправильной особой точки мы будем работать с асимптотическими рядами.

Для правильных особых точек уравнения (1) есть критерий, который дает теорема Фукса.

Theorem 1.1 *Уравнение*

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

имеет правильную особую точку $z = c$ тогда и только тогда, если коэффициент $p(z)$ имеет полюс не выше 1-го порядка, а коэффициент $q(z)$ имеет полюс не выше второго порядка. Т.е. они имеют следующие разложения

$$p(z) = (z-c)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z-c)^k,$$

$$q(z) = (z-c)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k (z-c)^k,$$

Поскольку мы доказываем критерий, доказательство надо проводить в обе стороны. Начнем с более сложной части. Докажем, что если коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ обладают нужными свойствами, то мы имеем правильную особую точку, т.е. наше уравнение допускает решения в виде односторонних рядов. Без ограничения общности можно считать, что $c = 0$. Тогда ряды для $p(z)$ и $q(z)$ имеют вид

$$p(z) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,$$

$$q(z) = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k,$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$$

Пока это формальный ряд (мы не знаем сходится ли он). Подставим его в уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k-1+\rho) c_k z^{k+\rho-2} + z^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} p_l z^l \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) c_k z^{k-1+\rho} +$$

$$+ z^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} q_l z^l \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

Приравнивая при одинаковых степенях z, получим рекуррентную систему для коэффициентов c_k В частности

$$(\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0)c_0 = 0$$

Но по нашей договоренности $c_0 \neq 0$, поэтому мы получаем уравнение на ρ

$$\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

Обозначим

$$F(\rho) = \rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0.$$

Рассматривая соотношения, которые получаются при степенях z, имеем

$$c_k = (F(\rho + k))^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} c_l(p_{k-l}(l + \rho) + q_{k-l})$$

Таким образом, коэффициенты $c_k, \;\; k = 1, 2, ...$ можно последовательно найти из этого соотношения, а c_0 можно выбрать произвольным(отличным от нуля).

Видно, что система для коэффициентов $c_k, \;\; k = 1, 2, ...$ однозначно разрешима если $F(\rho+k) \neq 0$. С другой стороны функция $F(\rho)$ - полином второго порядка, причем один из его корней уже зарезервирован за показателем ρ для нашего решения. Так что единственная возможная проблема состоит в том что добавляя целое положительное число к этому ρ мы наткнемся на второй корень этого уравнения. Ясно, что если мы выберем в качестве показателя корень с большей вещественной частью, то риска наткнуться на нули функции $F(\rho)$ у нас нет. Таким образом, всегда существует один формальный ряд вида

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$$

который удовлетворяет нашей рекуррентной системе.

Однако, это пока не решение нашего дифференциального уравнения. Для того, чтобы этот формальный ряд стал настоящим решением нужно доказать его сходимость. У нас есть сходимость рядов для функций $p(z)$ и $q(z)$. Будем считать, ряды для обеих этих функций сходятся в круге радиуса R_0 с центром в точке ноль. Тогда (мы это знаем из комплексного анализа) коэффициенты этих рядов допускают оценки

$$|p_k| < CR^{-k}, \;\; |q_k| < DR^{-k}, \;\; k = 0, 1, 2, ..., \;\; R < R_0$$

где C и D -некоторые константы. Если выбрать R достаточно малым, можно упростить эти оценки (для $k \neq 0$)

$$|p_k| < R^{-k}, \;\; |q_k| < R^{-k}, \;\; k = 1, 2, ...$$

И эти оценки мы будем подставлять в нашу рекуррентную систему. Будем доказывать, что

$$|c_k| \leq MR^{-k}$$

где M подходящая константа. Воспользуемся методом математической индукции. База индукции очевидна. Пусть оценка верна вплоть до $k - 1$. Докажем ее для k

$$|c_k| \leq |(F(\rho + k))^{-1}| \sum_{l=0}^{k-1} |c_l|(|p_{k-l}|(l + |\rho|) + |q_{k-l}|) \leq$$

$$\leq |(F(\rho+k))^{-1}|\sum_{l=0}^{k-1} MR^{-l}(R^{-(k-l)}(l+|\rho|)+R^{-(k-l)}) =$$

$$\leq MR^{-k}|(F(\rho+k))^{-1}|(k(|\rho|+1)+k(k-1)/2) =$$

Видно, что константа в оценке меняется и таким образом мы НЕ можем доказать индукционное предположение.

ВОПРОС: как преодолеть эти сложности и все-таки доказать оценку

$$|c_k| \leq MR^{-k}$$

МЫ же будем считать, эта проблема решилась. Таким образом у нас есть как минимум одно решение нужного вида. Обозначим ρ_1, ρ_2 корни уравнения

$$(\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0)c_0 = 0$$

Если разность этих корней не целая, то мы можем построить два решения нужного нам вида и в этом случае мы сразу понимаем, что у матрицы монодромии нет присоединенного вектора. Если разность целая $\rho_1-\rho_2=n$, то у нас проблема с построением одного из этих решений поскольку $F(\rho_2+n) = 0$. Мы получаем ноль в знаменателе при решении рекуррентной системы. Однако, в числителе (случайно) тоже может оказать ноль, поэтому будет решение нужного нам вида (т.е. без присоединенного вектора, без логарифма) или нет мы окончательно сказать не можем. Т.е. теорема Фукса не дает в этом случае окончательного ответа по поводу наличия или отсутствия присоединенного вектора. Только в случае если $\rho_1=\rho_2$, можно с определенность утверждать, что присоединенный вектор будет (поскольку в этом случае наша рекуррентная система дает единственное решение с точностью до домножения на константу.

Тем не менее остается ВОПРОС: как доказать существование второго решения в случае если $\rho_1-\rho_2=n$?

Теперь займемся доказательством теоремы в обратную сторону. Пусть у нашего уравнения

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

есть два решения вида

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho_1}$$

и

$$w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k+\rho_2}$$

(случай присоединенного вектора посмотрите самостоятельно) Тогда

$$w_1''+p(z)w_1'+q(z)w_1=0$$

$$w_2''+p(z)w_2'+q(z)w_2=0$$

Эти два равенства можно рассматривать как систему для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$. Система легко решается

$$p(z) = \frac{-w_1''w_2 + w_2''w_1}{w_1'w_2 - w_2'w_1}$$

$$q(z) = \frac{w_1''w_2 - w_2''w_1}{w_1'w_2 - w_2'w_1}$$

Рассмотрим знаменатель этих дробей

$$w_1'w_2 - w_2'w_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho_1)c_k z^{k+\rho_1-1}\sum_{l=0}^{\infty}d_l z^{l+\rho_2} -$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho_1}\sum_{l=0}^{\infty}(l+\rho_2)d_l z^{l+\rho_2-1} =$$

$$z^{\rho_1+\rho_2-1}(c_0d_0(\rho_1-\rho_2) + \sum_{k=1}^{\infty}e_k z^k)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{\infty} e_k z^k)$ сходящийся ряд Тейлора Причем

$$e_0 = c_0d_0(\rho_1 - \rho_2) \neq 0$$

Аналогично можно изучить числители

$$-w_1''w_2 + w_2''w_1 = z^{\rho_1+\rho_2-2}\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k$$

$$w_1''w_2' - w_2''w_1' = z^{\rho_1+\rho_2-3}\sum_{k=0}^{\infty}g_k z^k$$

Здесь $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ также некоторые сходящиеся ряды Тейлора.

В итоге, легко видеть что коэффициенты уравнения $p(z)$ и $q(z)$ обладают особенностями нужного вида. На этом будем считать теорему доказанной.