Лекция 5

По поводу вопросов с предыдущей лекции

ВОПРОС: проверить выполнение уравнения Лежандра для интеграла Шлефли.

Проверка происходит прямой подстановкой интегрального представления в уравнение. После чего нужно свести получившееся выражение к интегралу вида

$$const \int_\gamma \frac{d}{dt} \frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}} dt$$

Это интеграл от производной по замкнутому контуру. Он равен нулю.

1 Полиномы Лежандра

В прошлый раз мы закончили на том, что выяснили, что полиномы Лежандра

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

являются собственными функциями сингулярной задачи Штурма-Лиувилля

$$-((1-z^2)y')' = \lambda y,$$

y ограничено в точках $z=-1$ и $z=1$.

Исследуем свойства полиномов Лежандра.

Lemma 1.1 *Полином Лежандра P_n имеет ровно n простых корней на промежутке* $(-1,1)$

Посмотрим на полином

$$(z^2-1)^n$$

Легко видеть, что он имеет два корня кратности n в точках $z=1$ и $z=-1$. Аналогично полином

$$\frac{d}{dz}(z^2-1)^n$$

имеет два корня кратности $n-1$ в точках $z=1$ и $z=-1$ и (по теореме Ролля) один корень $z=z_1^1$ на промежутке $(-1,1)$. Далее

$$\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^n$$

имеет два корня кратности $n-2$ в точках $z=1$ и $z=-1$ и еще два корня: один корень $z=z_1^2$ на промежутке $(-1,z_1^1)$, а другой $z=z_2^2$ на промежутке $(z_1^1,1)$ В итоге, для n-ой производной получим ровно n простых корней на промежутке $(-1,1)$. Лемма доказана.

Поскольку мы получили полиномы Лежандра как решение краевой задачи, естественно посмотреть для них свойства ортогональности и нормировку. Введем стандартное скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Покажем, что полиномы Лежандра ортогональны (относительно данного скалярного произведения)

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{1}{n!m!2^{n+m}} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx$$

Будем считать, что $n > m$. Проинтегрируем по частям, снимая производные с первой части подынтегрального выражения и перебрасывая их на вторую часть. Внеинтегральные члены при этом не возникают поскольку в точках $z = 1$ и $z = -1$ наши степени равны нулю. Интегральное слагаемое тоже исчезнет, так как мы будем дифференцировать полином степени m n раз. Таким образом

$$(P_n, P_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Теперь посмотрим на нормировку

$$(P_n, P_n) = \frac{1}{n!n!2^{2n}} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

Начало выкладки ровно такое же, как и при доказательстве ортогональности. Интегрируем по частям. Внеинтегральных членов по-прежнему нет. Остается только интегральное слагаемое

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!n!2^{2n}} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2(2n)!}{n!n!2^{2n}} \int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx$$

Сделаем замену $x^2 = s$

$$(P_n, P_n) = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} \int_{0}^{1} (1-s)^n s^{-1/2} ds = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} B(n+1, 1/2) =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}$$

Используем формулу удвоения

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\sqrt{\pi}}$$

Тогда, учитывая, что

$$(2n)! = 2n\Gamma(2n)$$

получим

$$(P_n, P_n) = \frac{2n2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!n!2^{2n}} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)} = \frac{2}{2n+1}$$

Таким образом полиномы Лежандра представляют собой ортогональную систему, которую при желании можно сделать ортонормированной. Посмотрим на полноту данной системы. Прежде всего можно заметить, что любой полином можно представить как линейную комбинацию полиномов Лежандра. С другой стороны у нас есть теорема Вейерштрасса, которая утверждает, что полиномы плотны в норме C в пространстве непрерывных функций. Следовательно и полиномы Лежандра плотны в пространстве непрерывных функций в норме C. Но кроме того мы знаем, что непрерывные функции плотны в норме L_2 в пространстве L_2 и мы знаем, что норма C более сильная чем норма L_2, поэтому наша система полиномов Лежандра является плотной в пространстве $L_2[1,-1]$ в норме L_2. Но $L_2[1,-1]$ -гильбертово пространство и плотная ортогональная система в таком пространстве является базисом.

2 Присоединенные полиномы Лежандра

Рассмотрим обобщенное уравнение Лежандра

$$((1-z^2)v')' + \nu(\nu+1)v - \frac{\mu^2}{(1-z^2)}v = 0,$$

Это уравнение имеет те же особые точки 1, -1 и ∞. Оно также принадлежит классу Фукса. Соответствующий символ Римана имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \infty \\ \mu/2 & -\mu/2 & \nu+1 \\ \mu/2 & -\mu/2 & -\nu \end{pmatrix}.$$

Можно изучать обобщенное уравнение Лежандра в общей ситуации, когда μ -любое. Но мы нацелены на приложения к сферическим функциям и для нас достаточно изучить это уравнение для целых неотрицательных $\mu = m$. Оказывается, в этом случае есть связь между решениями обобщенного уравнения Лежандра $v(z)$ и решением обычного уравнения Лежандра $w(z)$

$$v(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} w(z)$$

ВОПРОС: Доказать эту формулу.

Из символа Римана легко видеть, что при $m \neq 0$ в окрестности точки $z = 1$ есть два решения: одно ведет себя как $(z-1)^{m/2}$ а другое как $(z-1)^{-m/2}$. Т.е. одно ограничено в этой точке, второе нет. Таким образом, можно рассматривать сингулярную задачу Штурма Лиувилля связанную с обобщенным уравнением Лежандра:

$$-((1-z^2)y')' + \frac{m^2}{(1-z^2)} = \lambda y, \quad \lambda = \nu(\nu+1)$$

y ограничено в точках $z=-1$ и $z=1$. Найдем решение этой задачи. Ограниченное в точке $z=1$ решение уравнение с точностью до домножения на константу равно

$$(1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z) \tag{1}$$

Рассмотрим поведение этой функции в окрестности точки $z=-1$. Для $P_\nu(z)$ у нас есть готовые ответы. Если ν - не целое, то $P_\nu(z)$ ведет себя как логарифм, а ее производная порядка m ведет себя как $(z-1)^{-m}$. Таким образом, наша функция (1) будет неограниченной. А если ν - целое то видно, что (1) будет ограниченным. Таким образом, при $m \le n$, мы получили решение нашей сингулярной краевой задачи в виде системы функций

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z), \quad n = m, m+1, m+2...$$

Эти функции носят "странное"название присоединенных полиномов Лежандра. Название странное поскольку для нечетных m это не полиномы.

Посмотрим на свойства присоединенных полиномов Лежандра. Как обычно, нас будет интересовать ортогональность, нормировка и полнота. Начнем с ортогональности. Используем то же скалярное произведение, что и для полиномов Лежандра

$$(P_n^m, P_{n'}^m) = \int_{-1}^1 P_n^m(x)P_{n'}^m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{n!n'!2^{n+n'}}\int_{-1}^1 (1-x^2)^m\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n\frac{d^{n'+m}}{dx^{n'+m}}(x^2-1)^{n'}dx$$

Будем считать, что $n > n'$. Проинтегрируем по частям, снимая производные с $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$ и перебрасывая их на $(1-x^2)^m\frac{d^{n'+m}}{dx^{n'+m}}(x^2-1)^{n'}$. Внеинтегральные члены при этом не возникают поскольку в точках $z=1$ и $z=-1$ сначала будет работать степень $(1-x^2)^m$, а в момент когда она перестанет работать зануление внеинтегральных слагаемых обеспечит степень $(x^2-1)^n$, которую мы разгрузили от части производных. Интегральное слагаемое тоже исчезнет, так как мы будем дифференцировать полином степени $m+n'$ $m+n$ раз. Таким образом

$$(P_n^m, P_{n'}^m) = 0, \quad n \neq m.$$

Теперь посмотрим на случай $n = n'$

$$(P_n^m, P_n^m) = \frac{1}{n!n!2^{2n}}\int_{-1}^1 (1-x^2)^m\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n dx$$

После интегрирования по частям получим

$$(P_n^m, P_n^m) = c_{nm}\frac{(-1)^{m+n}}{n!n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

Здесь c_{nm} -константа, которая получается при дифференцировании полинома $(1-x^2)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$ (степени $n+m$) $\quad m+n$ раз. Она получается если $2m$ раз продифференцировать степень $(1-x^2)^m$ и $n-m$ раз $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$. По формуле Лейбница, имеем

$$c_{nm} = (-1)^m(2m)!(2n)!C_{n+m}^{2m} = (-1)^m\frac{(2m)!(2n)!(n+m)!}{(2m)!(n-m)!} = (-1)^m\frac{(2n)!(n+m)!}{(n-m)!}$$

Здесь C_{n+m}^{2m} биномиальный коэффициент. Таким образом,

$$(P_n^m, P_n^m) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{(2n)!(-1)^n}{n!n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

Но мы в предыдущем параграфе уже сосчитали

$$\frac{(2n)!(-1)^n}{n!n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

Таким образом,

$$(P_n^m, P_n^m) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}$$

Посмотрим на полноту. Вся наша система функций

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z), \quad n = m, m+1, m+2...$$

имеет нули на концах промежутка $[-1,1]$ и поэтому плохо приближает произвольную функцию в этих точках. Но внутри промежутка, т.е. на интервале $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ наши функции по-прежнему плотны в норме C в пространстве непрерывных функций. Это обеспечивает плотность в норме L_2 в пространстве $L_2[1,-1]$. Дело в том, что норма пространства $L_2[1,-1]$ интегральная и поведение функции в малых окрестностях двух точек для нее не существенно. Таким образом наша система дает базис в $L_2[1,-1]$.

ВОПРОС: Мы начинали разговоры о присоединенных полиномах Лежандра с вопроса о решении сингулярной краевой задачи:

$$-((1-z^2)y')' + \frac{m^2}{(1-z^2)} = \lambda y, \quad \lambda = \nu(\nu+1)$$

y ограничено в точках $z=-1$ и $z=1$. Мы нашли часть решений этой задачи в в виде наших полиномов. Но в нашей логике есть небольшой дефект. Дело в том, что мы опираемся на формулу для решения

$$v(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}w(z)$$

Она хорошо работает для всех ν за исключением ситуации когда $\nu = n$-целое и $n < m$. В этом случае глядя на эту формулу мы получаем только одно линейно независимое решение, а второе будет нулем. Таким образом, вообще говоря, могут быть решения нашей краевой задачи помимо присоединенных полиномов Лежандра. Так ли это и почему?