Лекция 7

В прошлый раз мы описали класс сферических функций и увидели, что этот класс составляет базис в $L_2(S^2)$.

1 Производящая функция для полиномов Лежандра

Возьмем точку с координатами (r, θ, ϕ) внутри нашей сферы S^2 $(r < 1)$. Расстояние между этой точкой и верхним полюсом сферы $(\theta = 0)$ имеет вид

$$(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{1/2}$$

(это элементарная геометрия), причем функция

$$\frac{1}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{1/2}}$$

гармоническая. Это следствие того, что она пропорциональна фундаментальному для трехмерного оператора Лапласа. Эта функция называется производящей функцией для полиномов Лежандра. Разложим ее в ряд Тейлора по степеням r

$$\frac{1}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\theta) r^k$$

Применим оператор Лапласа к этому равенству. Поскольку левая часть - гармоническая функция мы получим ноль

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta c_k(\theta) r^k = 0$$

Но, как мы знаем, оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{s^2}$$

Угловая часть этого оператора

$$\Delta_{s^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Т.е. наше равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k(\theta) k(k+1) + \Delta_{S^2} c_k(\theta)) r^{k-2} = 0$$

Таким образом, коэффициенты $c_k(\theta)$ удовлетворяют уравнению для сферических функций, причем в случае $m = 0$. Следовательно они пропорциональны полиномам Лежандра

$$c_k(\theta) = d_k P_k(\cos\theta)$$

Константу d_k можно найти положив $\theta = 0$.Тогда

$$\frac{1}{(1 - 2r + r^2)^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

Следовательно,

$$d_k = 1$$

Окончательно,

$$\frac{1}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta) r^k$$

ВОПРОС: В процессе вывода мы поменяли местами сумму и оператор Лапласа. Почему это можно делать?

2 Разложение по сферическим функциям

В параграфе посвященном сферическим функциям мы выяснили, что функцию из $L_2(S^2)$ мы можем разложить по сферическим функциям

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^m(\theta, \phi)$$

Разумеется, учетом того что у нас ортогональный базис, легко вычислить коэффициенты f_{nm}

$$f_{nm} = \frac{(f, Y_n^m)_{L_2(s^2)}}{\|Y_n^m\|^2}$$

Однако мы нацелены на другую формулу. Введем в рассмотрение сферические функции с одним значком

$$Y_n = \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^m(\theta, \phi)$$

Это несколько необычно, поскольку спецфункция определяется по разному для разных пробных функций. Но это естественно с точки зрения спектрального анализа: $Y_n(\theta, \phi)$ - проекция функции f на подпространство отвечающее собственному числу $\lambda_n = n(n+1)$. Теперь наша цель найти более простое выражение для функций $Y_n(\theta, \phi)$ через f. Для начала, возьмем функцию $r^l Y_l$. Это гармоническая функция внутри сферы S^2.

Давайте вспомним одно из свойств гармонических функций. Гармоническая функция u в области D представляется через свои значения на границе ∂D

$$u(x)=\int_{\partial D}\left(u(\xi)\frac{\partial g_0(x,\xi)}{\partial n}-g_0(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\right)dS$$

Здесь $g_0(x,\xi)$ фундаментальное решение для оператора Лапласа, в нашем трехмерном случае

$$g_0(x,\xi)=\frac{-1}{4\pi|x-\xi|}$$

Применим это свойство для гармонической функции r^lY_l (будем считать, что ρ,θ',ϕ' сферические координаты для переменной ξ)

$$r^lY_l=\int_{S^2}\left(\rho^lY_l(\theta',\phi')\frac{\partial}{\partial n}\frac{-1}{4\pi|x-\xi|}-\frac{-1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial}{\partial n}\rho^lY_l(\theta',\phi')\right)dS$$

Введем следующие обозначения: вместо переменных (θ,ϕ) единичный вектор $\overrightarrow{\alpha}$ вместо (θ',ϕ') вектор $\overrightarrow{\beta}$. Как мы знаем из предыдущего параграфа

$$\frac{1}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{1/2}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\theta)r^k$$

или несколько более общий вариант

$$\frac{1}{(1-2\frac{r}{\rho}\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})+\frac{r^2}{\rho^2})^{1/2}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))\left(\frac{r}{\rho}\right)^k$$

Здесь $\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ -косинус угла между векторами. Заметим, что

$$\frac{1}{|x-\xi|}=\frac{1}{(\rho^2-2r\rho\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})+r^2)^{1/2}}$$

Теперь возвращаясь к нашему интегралу получим

$$r^lY_l(\overrightarrow{\alpha})=\int_{S^2}(\rho^lY_l(\overrightarrow{\beta})\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{-1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))\frac{1}{\rho}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))\frac{1}{\rho}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^lY_l(\overrightarrow{\beta}))dS=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1+l)r^k\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}Y_l(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS$$

или

$$r^lY_l(\overrightarrow{\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1+l)r^k\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}Y_l(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS$$

Слева у нас одна степень r, а справа ряд Тейлора, следовательно

$$\int_{S^2} Y_l(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS = 0, \quad l \neq k$$

$$\int_{S^2} Y_k(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS = \frac{4\pi}{2k+1}Y_k(\overrightarrow{\alpha})$$

Вернемся к вопросу, с которого мы начинали это вычисление: как по функции f найти функции Y_n на которые она разлагается

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$$

Домножим левую и правую часть на $P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))$ и проинтегрируем

$$\int_{S^2} f(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS = \int_{S^2}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS =$$

$$= \int_{S^2} Y_k(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS = \frac{4\pi}{2k+1}Y_k(\overrightarrow{\alpha})$$

Отсюда, окончательно имеем

$$Y_k = \frac{2k+1}{4\pi}\int_{S^2} Y_k(\overrightarrow{\beta})P_k(\cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))dS$$

Посмотрим на простейшие приложения сферических функций

3 Решение задачи Дирихле и Неймана в простейших областях

Пусть дана внутренняя задача Дирихле для оператора Лапласа в шаре радиуса R с центром в точке ноль

$$\Delta u = 0$$

$$u|_{|x|=R} = f(\overrightarrow{\alpha})$$

и функция $f(\alpha)$ раскладывается в ряд по сферическим функциям

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Y}_n(\overrightarrow{\alpha})$$

Здесь шляпка над Y_n введена, чтобы обозначить конкретные сферические функции отвечающие f. Будем искать решение этой задачи в виде разложения

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\overrightarrow{\alpha})r^n$$

Каждый член этой суммы - гармоническая функция, поэтому уравнение Лапласа выполнено. Достаточно добиться выполнения граничного условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\overrightarrow{\alpha}) R^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Y}_n(\overrightarrow{\alpha})$$

Таким образом, наше решение имеет вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Y}_n(\overrightarrow{\alpha}) \frac{r^n}{R^n}$$

Остальные стандартные задачи мы посмотрим на семинарах.

4 Асимптотические решения в окрестности неправильной особой точки

Теперь посмотрим что происходит в окрестности неправильных особых точек. Первое, что мы уже знаем в окрестности неправильной особой точки решение имеет полный ряд Лорана. А мы знаем из комплексного анализа, что от двухсторонних рядов и точки зрения вычислений и с точки зрения формульного анализа толку мало. Поэтому вместо сходящихся (но мало пригодных) рядов люди придумали асимптотический анализ для таких решений. Сразу надо сказать, что асимптотический анализ для неправильной особой точки чрезвычайно разнообразен. И у нас не будет общей теоремы (типа Фукса), которая бы давала ответы на все вопросы. Такой теоремы вообще нет! Мы изучим очень частную ситуацию для уравнения

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

Рассмотрим точку $z = \infty$ и будем считать, что коэффициенты p и q имеют следующие разложения в окрестности бесконечности

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k}$$

$$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k}$$

Видно, что точка $z = \infty$ вообще говоря неправильная. Чтобы разобраться с поведением решения в окрестности этой точки посмотрим на модельную ситуацию, где мы все понимаем

$$w'' + p_0 w' + q_0 w = 0.$$

Т.е. уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение нам хорошо известно

$$w = e^{\alpha_{1,2} z}$$

где $\alpha_{1,2}$ - корни характеристического полинома

$$\alpha^2 + p_0\alpha + q_0 = 0$$

Именно экспонента $e^{\alpha_{1,2}z}$ имеет "плохой"ряд в окрестности бесконечности. Тогда для уравнения с коэффициентами p и q появляется идея поискать решение выделив в качестве множителя экспоненту, а остальном как раньше

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-\rho_1}$$

Мы относимся к этому ряду как формальному ряду и поначалу будем изучать только постановку его в уравнение. В дальнейшем, мы покажем, что этот ряд дает асимптотическое разложение некоторого точного решения уравнения (но все равно НЕ БУДЕТ сходящимся).

Подставим ряд в уравнение и сразу уберем общие множители - экспоненту и степень $z^{-\rho_1}$

$$\alpha_1^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} + 2\alpha_1\sum_{k=0}^{\infty}(-k-\rho_1)c_k z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-k-\rho_1-1)(-k-\rho_1)c_k z^{-k-2} +$$

$$+\alpha_1\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}\sum_{l=0}^{\infty} p_l z^{-l} + \sum_{k=0}^{\infty}(-k-\rho_1)c_k z^{-k-1}\sum_{l=0}^{\infty} p_l z^{-l} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}\sum_{l=0}^{\infty} q_l z^{-l} = 0$$

Приравняв при одинаковых степенях z получим

$$\alpha_1^2 c_k + 2\alpha_1(-k+1-\rho_1)c_{k-1} + (-k-\rho_1+1)(-k+2-\rho_1)c_{k-2} +$$

$$+\alpha_1\sum_{l=0}^{k} p_{k-l}c_l + \sum_{l=0}^{k-1}(-l-\rho_1)p_{k-1-l}c_l + \sum_{l=0}^{k} q_{k-l}c_l = 0$$

Рассмотрим эту систему. В старшем порядке $k=0$

$$\alpha_1^2 c_0 + \alpha_1 p_0 c_0 + q_0 c_0 = 0$$

Как обычно считаем, что $c_0 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1^2 + \alpha_1 p_0 + q_0 = 0$$

Т.е. получили наше квадратное уравнение на α_1. В следующем порядке $k=1$

$$\alpha_1^2 c_1 - 2\rho_1\alpha_1 c_0 + \alpha_1(p_1 c_0 + p_0 c_1) - \rho_1 p_0 c_0 + c_1 q_0 + c_0 q_1 = 0$$

Три слагаемых содержащих c_1 сокращаются. Остается уравнение для ρ_1

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1 p_1 + q_1}{p_0 + 2\alpha_1}$$

Ноль в знаменателе этой формулы означает что у уравнения на α_1 кратный корень. Будем считать, что это не так. Покажем что в дальнейшем система однозначно разрешима (если зафиксировать $c_0 \neq 0$). Рассмотрим произвольное k

$$\alpha_1^2 c_k + 2\alpha_1(-k+1-\rho_1)c_{k-1} + (-k-\rho_1+1)(-k+2-\rho_1)c_{k-2}+$$

$$+\alpha_1 \sum_{l=0}^{k} p_{k-l}c_l + \sum_{l=0}^{k-1}(-l-\rho_1)p_{k-1-l}c_l + \sum_{l=0}^{k} q_{k-l}c_l = 0$$

Слагаемые содержащие c_k сокращаются автоматически. Выделим слагаемые содержащие c_{k-1}

$$2\alpha_1(-k+1-\rho_1)c_{k-1} + \alpha_1 p_1 c_{k-1} + (-k+1-\rho_1)p_0 c_{k-1} + q_1 c_{k-1}$$

Для проверки разрешимости системы достаточно показать, что коэффициент при c_{k-1} не обращается в ноль

$$2\alpha_1(-k+1-\rho_1)+\alpha_1 p_1+(-k+1-\rho_1)p_0+q_1 = (2\alpha_1+p_0)(-k+1-\rho_1)+\rho_1(2\alpha_1+p_0) =$$

$$= (2\alpha_1 + p_0)(-k+1)$$

С учетом нашей договоренности об отсутствии кратных корней, и то что $k > 1$ мы получаем разрешимость системы. Таким образом, если нет кратного корня мы получаем два формальных решения вида

$$w_{1,2}(z) = e^{\alpha_{1,2} z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{1,2} z^{-k-\rho_{1,2}}$$

В дальнейшем мы покажем, что эти решения являются асимптотическими разложениями точных решений нашего уравнения. ВОПРОС: А что делать в случае кратного корня?