Вариационное исчисление. Семинар 1 апреля.

3 апреля 2020 г.

1 Основные сведения.

Простейшая вариационная задача заключается в нахождении экстремума функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

среди множества гладких кривых, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Функция $y(x)$ называется аргументом функционала. Функция $F(x, y,')$ – функция Лагранжа – считается дважды непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам. Все множество функций, на котором рассматривается функционал, называется классом допустимых функций (кривых).

Если функция $y(x)$ дает экстремум функционалу (1), то необходимо она является экстремалью этого функционала, то есть является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $y(x)$.

1.1 Частные случаи функции Лагранжа $F(x, y, y')$.

1) Если $F = F(x, y')$, то уравнение (2) имет первый интеграл

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C. \tag{3}$$

2) Если $F = F(y, y')$, то уравнение (2) имет первый интеграл

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C. \tag{4}$$

Первые интегралы (3) и (4) являются дифференциальными уравнениями первого порядка.

2 Примеры.

2.1 Задача 71 (из задачника "Вариационное исчисление М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев).

Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Решение.

Уравнение Эйлера (2) для функции Лагранжа $F(x, y, y') = 12xy - y'^2$ принимает вид

$$12x - \frac{d}{dx}(-2y') = 0, \quad \text{то есть} \quad 12x + 2y'' = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$y''(x) = -6x,$$

$$y'(x) = -3x^2 + C_1,$$

$$y(x) = -x^3 + C_1 x + C_2.$$

Из граничных условий получаем два уравнения для C_1 и C_2:

$$y(-1) = 1 \quad \Rightarrow \qquad 1 - C_1 + C_2 = 1,$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \qquad C_2 = 0.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что $C_1 = 0, \quad y(x) = -x^3$.

2.2 Задача 72 (из Краснова).

Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$$

Решение.

Уравнение Эйлера для функции Лагранжа $F(x, y, y') = y'^2 + 2yy' + y^2$ принимает вид

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0, \quad \text{или} \quad y'' - y = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{5}$$

Теперь нужно зафиксировать постоянные $C_1, \; C_2$, используя граничные условия. А именно:

$$y(1) = 1 \quad \Rightarrow \qquad C_1 e + C_2 e^{-1} = 1, \tag{6}$$

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \qquad C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0. \tag{7}$$

Умножая уравнение (6) на e и вычитая из него уравнение (7), находим C_2, а затем - постоянную C_1:

$$C_2 = \frac{e^2}{2\sinh(1)}, \qquad C_1 = -\frac{e^{-2}}{2\sinh(1)}.$$

Подставляя результат в уравнение (5), получаем уравнение экстремали

$$y(x) = -\frac{\sinh(x-2)}{\sinh(1)}.$$

2.3 Задача 73 (из Краснова).

Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{y(1 + y'^2)}dx, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение.

Заметим, что функция Лагранжа $F = \sqrt{y(1 + y'^2)}$ не зависит явно от переменной x. Это значит, что мы можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера (4). Придем к уравнению

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Таким образом,

$$y'^2 = C_2 y - 1, \qquad y' = \pm\sqrt{C_2 y - 1}. \tag{8}$$

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_2 y - 1}} = dx, \quad \pm\frac{2}{C_2}\sqrt{C_2 y - 1} = x + C_3. \tag{9}$$

Отсюда получаем уравнение экстремали

$$y(x) = \frac{1}{C_2} + \frac{C_2}{4}(x + C_3)^2, \quad C_2 \neq 0. \tag{10}$$

Теперь нужно, пользуясь граничными условиями, зафиксировать постоянные C_2, C_3. Это приводит нас к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{C_2} + \frac{C_2}{4}C_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{C_2} + \frac{C_2}{4}(1 + C_3)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{11}$$

Вычтем первое из уравнений (11) из второго, учитывая, что $C_2 \neq 0$:

$$\frac{C_2}{4}(1 + 2C_3) = 0, \quad \text{или} \quad C_3 = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя результат в одно из уравнений (11), получим уравнение для C_2:

$$\frac{1}{C_2} + \frac{C_2}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Получается квадратное уравнение для C_2. Его решение имеет вид

$$C_2 = 4(\sqrt{2} \pm 1).$$

Окончательно, уравнение для $y(x)$ принимает вид

$$y(x) = \frac{1 + (3 \pm 2\sqrt{2})(2x - 1)^2}{4(\sqrt{2} \pm 1)}. \tag{13}$$

Экстремалей в данной задаче две!

3 Домашнее задание.

По Краснову номера: 74, 75, 78, 79, 105, 106